**記号論理学 I（岡本賢吾）　7 月 25 日（月）　2 限　時間 90 分**

**注意**

- 配布教材のみ，持ち込んでよい（コピー，書き込みも差し支えない）
- 解答用紙は，最初に 1 枚配布．足りない場合は，そのつど監督者に申し出て追加配布を受ける．追加の上限は設けないが，無駄にスペースをとらない答案を作成するよう極力留意すること．
- 答案用紙が複数枚になったものは，提出時に（左上端をまとめて折り曲げるなどして）ばらばらにならない工夫をすること．
- 問題は．この用紙の裏表両面である．
- 回答の順序は自由，どの問題に対する解答なのか判るように配慮すること．

I. **次の (1)–(6) の帰結関係について，その証明図を書け．** (4) だけは「$\vdash_{\mathrm{NK}}$」とある通り，二重否定則を使う．それ以外の問題は，必ず NJ の範囲内でやる．「$\Phi$」「$\Psi$」「$\mathrm{X}$」「$\Upsilon$」「$\Omega$」は，いずれも任意の論理式を代理する．また，「$\Phi(x)$」「$\Psi(x,y)$」「$\mathrm{X}(y,z)$」は，それぞれ括弧内に提示されている変項以外，一切自由変項を含んでいないと考えてよい．

(1) $\Phi \to (\Psi \wedge \mathrm{X}) \quad \vdash \quad (\neg\Psi \vee \neg\mathrm{X}) \to \neg\Phi$
$\neg\Psi \vee \neg\mathrm{X}$ と，$\Phi$ とを一旦仮定した上で，矛盾を導く．

(2) $\Phi \vee \Psi \quad \vdash \quad ((\Phi \to \mathrm{X}) \wedge (\Psi \to \Upsilon)) \to ((\Upsilon \to \Omega) \to ((\mathrm{X} \to \Omega) \to \Omega))$
$(\Phi \to \mathrm{X}) \wedge (\Psi \to \Upsilon)$，$\Upsilon \to \Omega$，$X \to \Omega$ を一旦仮定する，

(3) $(\Phi \to \Psi) \to \mathrm{X}, (\Psi \to \Phi) \to \neg\mathrm{X} \quad \vdash \quad (\Phi \to \neg\Psi) \wedge (\Psi \to \neg\Phi)$
$\Phi$ を仮定すれば $\Psi \to \Phi$ が，$\Psi$ を仮定すれば $\Phi \to \Psi$ が導けることに注意．結論のためには，$\Phi \to \neg\Psi$ と，$\Psi \to \neg\Phi$ の双方を導くことが必要．

(4) $\neg(\neg\Phi \wedge \neg(\Psi \wedge \Phi)) \quad \vdash_{\mathrm{NK}} \quad \Phi$
結論の否定をまず仮定するわけだが，それだけでなく，最初に一旦 $\Psi \wedge \Phi$ を仮定する．この仮定をうまく外して，前提との間で矛盾を導くことを考える．二重否定則は一回用いるだけ．

(5) $\exists x(\Phi(x) \wedge \forall y(\Psi(x,y) \to \forall z\mathrm{X}(y,z))) \quad \vdash \quad \forall y\exists x\forall z(\Psi(x,y) \to (\Phi(x) \wedge \mathrm{X}(y,z)))$
前提から，直ちに ∃ 除去則のサブ・プルーフに入る．後は，結論の式に至るように順を追って推論規則を適用してゆけばよい．束縛変項の例化をする際に，その変項もそのまま用いて差し支えない．

(6) $\forall x(\exists y(x = f(y)) \to \exists z(x = g(z))) \quad \vdash \quad \forall v\exists u(f(v) = g(u))$
$f(v) = f(v)$ から始める．これと前提とを，それぞれ適当に推論規則を適用した上で組み合わせれば，結論の $\exists u(f(v) = g(u))$ と比べて束縛変項 $u$ だけが異なっている式を導くことができる．そこで更に ∃ 除去則のサブ・プルーフに入り，例化の際に束縛変項を $u$ に置き換える．

［裏面に続く］

II. **以下を読み，後の[問い 1]–[問い 3]に答えよ．**

ハイティング算術（HA）では，次のような一項関数記号 $\mathrm{Pred}(x)$ を定義することができる（もちろんペアノ算術でもできるが，ここでは HA で考える）．

$$\mathrm{Pred}(0) = 0 \tag{Def. 1}$$
$$\forall x(\mathrm{Pred}(\mathrm{S}x) = x) \tag{Def. 2}$$

要するに $\mathrm{Pred}(x)$ とは，$n(\geq 1)$ に対しては $n-1$ を返し，$n = 0$ に対しては 0 自身を返す関数に他ならない（Pred は「predecessor 先行者」に由来する）．このことの証拠として，次の二つが証明可能である．

$$\vdash_{\mathrm{HA}} \quad \forall z(z = 0 \to \mathrm{Pred}(z) = 0) \tag{[∗1]}$$
$$\vdash_{\mathrm{HA}} \quad \forall z \forall v(z = \mathrm{S}v \to \mathrm{Pred}(z) = v) \tag{[∗2]}$$

[∗1] は瑣末なので，[∗2] について考える．[∗2] を証明するには，$z$ についての数学的帰納法を用いる．すなわち，いま [∗2] を

$$\vdash_{\mathrm{HA}} \quad \forall z\, \Phi(z)$$

と図式化すると，

$$\vdash_{\mathrm{HA}} \quad \Phi(z := 0) \tag{[\#1]}$$
$$\vdash_{\mathrm{HA}} \quad \forall z(\Phi(z) \to \Phi(z := \mathrm{S}z)) \tag{[\#2]}$$

を証明すれば，ここから数学的帰納法によって [∗2] を証明できる．

**[問い 1]** 式 $\Phi(z := 0)$ を，明示的に（つまり図式でない形で）書け．
**[問い 2]** 式 $\forall z(\Phi(z) \to \Phi(z := \mathrm{S}z))$ を，明示的に書け．
**[問い 3]** ［問い 2］への回答で与えた明示的な式に基づき，[#2] の証明図を構成せよ．このときもちろん，NJ（= を含む）の推論規則と HA の諸公理，更に，上記の (Def. 1)(Def. 2) を用いてよい．なお，この証明は見かけより簡単であり，仮定としての $\Phi(z)$ を実際には使わずに，いきなり $\Phi(z := \mathrm{S}z)$ を導くことができる（その際，$v$ についての数学的帰納法を使うこともない）．

III. **自分で用意した興味ある論証（記号論理に関係あれば何でもよい）を書くか，または，記号論理の意義について考えることを述べよ．**

［問題終わり］