数学 II 演習　解答・解説集

数学 II 試験対策委員会

概要

このファイルは、2004 年度夏学期 数学 II 演習（足助太郎教官）の授業で配布された演習問題の一部に対し、解答をつけたものです。解答は、当時シケ対だった 4 名で分担して作成しました。

中には難しめの問題もありますが、線型代数の入門的講義として標準的な問題が大半ですので、参考にしてください。

なお、一部、論理的な誤りが見つかっている問題がありますが、そのまま残しています。慎重に読んでください。

掲載問題（目次）

04/4/21 のセット

問5

問題 θ を実数とし、φ_θ で $\mathbb{R}^2$ の正の向き（反時計回り）の θ 回転を表す。

1) φ_θ は $\mathbb{R}-$ 線形写像であることを示し、行列表示を求めよ。
2) φ_θ は $\mathbb{R}-$ 線形同型写像であることを示せ。
3) $z \in \mathbb{C}$ とするとき、$z = x + \sqrt{-1}y,\ x, y \in \mathbb{R}$ と書いて $\psi_\theta(z) = \varphi_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と定める。ここで、$\lambda = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta \in \mathbb{C}$ とすると、$\psi_\theta(z) = \lambda z$ であることを示せ。但し、$z \in \mathbb{C}$ は $z = x + \sqrt{-1}y,\ x, y \in \mathbb{R}$ と実数を用いて表し、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とかき改めて $\mathbb{R}^2$ の元とみなす。

解答 1) 点 (x, y) と x 軸とのなす角を α 、原点からの距離を r とすると、$x = r\cos\alpha,\ y = r\sin\alpha$

点 (x, y) を θ 回転した点を (x', y') とすると、点 (x', y') と x 軸とのなす角は $\alpha + \theta$ だから、

$$x' = r\cos(\alpha+\theta) = r(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = r\sin(\alpha+\theta) = r(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta) = x\sin\theta + y\cos\theta$$

よって、

$$\varphi_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ として、

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= \varphi_\theta \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x_1+x_2)\cos\theta - (y_1+y_2)\sin\theta \\ (x_1+x_2)\sin\theta + (y_1+y_2)\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1\cos\theta - y_1\sin\theta \\ x_1\sin\theta + y_1\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2\cos\theta - y_2\sin\theta \\ x_2\sin\theta + y_2\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \varphi_\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \varphi_\theta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

また、$\lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ として、

$$\begin{aligned}
\varphi_\theta\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda x\cos\theta - \lambda y\sin\theta \\ \lambda x\sin\theta + \lambda y\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \lambda\varphi_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

上の 2 式より、φ_θ は $\mathbb{R}-$ 線型写像である。

また、$\begin{cases} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$ より、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって、φ_θ の行列表示は $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\cos\theta} & \boldsymbol{-\sin\theta} \\ \boldsymbol{\sin\theta} & \boldsymbol{\cos\theta} \end{pmatrix}$ である。

2) $\varphi_{-\theta}$ の行列表示は

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

であり、

$$\begin{aligned}
\varphi_{-\theta} \circ \varphi_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\
\varphi_\theta \circ \varphi_{-\theta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

より、$\varphi_{-\theta} \circ \varphi_\theta = \varphi_\theta \circ \varphi_{-\theta} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ なので、φ_θ は $\mathbb{R}$-線型同型写像である。

Q.E.D

3)

$$\begin{aligned}
\psi_\theta(z) &= \varphi_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}, \\
\lambda z &= (\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)(x + \sqrt{-1}y) \\
&= (x\cos\theta - y\sin\theta) + \sqrt{-1}(x\sin\theta + y\cos\theta)
\end{aligned}$$

ここで、$(x\cos\theta - y\sin\theta) + \sqrt{-1}(x\sin\theta + y\cos\theta)$ を、問題文に従い $\begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$ と書き改めることにより、$\psi_\theta(z) = \lambda z$ となる。

Q.E.D

解説 面倒だったかもしれませんが、問題は簡単だったでしょう。
ここで補足問題。
問・$V = \{\varphi_\theta | 0 \leq \theta < 2\pi\}$ は、自然な演算により $\mathbb{R}$-線型空間とみなせるか。

問 7

問題 $a, b \in R$ とし、$V = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; a\dfrac{df}{dx} + bf = 0 \right\}$ とする。ここで式中の x は変数であって、また '0' は恒等的に 0 であるような函数を表す。このとき V は $\mathbb{R}$−線形空間であることを示せ。

解答 V の元に対し、和と実数倍を、$v, w \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$ として $\begin{cases} (v+w)(x) = v(x) + w(x) \\ (\lambda v)(x) = \lambda v(x) \end{cases}$ と定める。すると、

1) $\forall v, w, z \in V$ に対し $((v+w)+z)(x) = (v+w)(x) + z(x) = v(x) + w(x) + z(x)$,
$(v + (w+z))(x) = v(x) + (w+z)(x) = v(x) + w(x) + z(x)$ なので
結合則 $(v+w)+z = v+(w+z)$ が成り立つ。

2) $\forall v, w \in V$ に対し $(v+w)(x) = v(x) + w(x) = w(x) + v(x) = (w+v)(x)$ なので、交換則 $v + w = w + v$ が成り立つ。

3) $o = 0 \in V$ とすると、明らかに $o \in V$ だが、$\forall v \in V,\ v + o = v$ なので、ゼロ元が存在する。

4) $v \in V,\ w(x) = -v(x)$ とすると、$a\dfrac{dw}{dx} + bw = -a\dfrac{dv}{dx} - bv = 0$ より $w \in V$ だが、このとき $w + v = o$ (o は 3) で定めた函数) なので、逆元（マイナス）が存在する。

5) $\forall \lambda, \mu \in K,\ \forall v \in V$ について $((\lambda+\mu)v)(x) = (\lambda+\mu)v(x) = \lambda v(x) + \mu v(x) = (\lambda v)(x) + (\mu v)(x) = (\lambda v + \mu v)(x)$ なので、$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ が成り立つ。

6) $\forall \lambda \in K, \forall v, w \in V$ について $(\lambda(v+w))(x) = \lambda(v+w)(x) = \lambda(v(x) + w(x)) = \lambda v(x) + \lambda w(x) = (\lambda v + \lambda w)(x)$ なので、$\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$ が成り立つ。

7) $\forall \lambda, \mu \in K, \forall v \in V$ について $((\lambda\mu)v)(x) = \lambda\mu v(x) = \lambda(\mu v(x))$ なので、$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ が成り立つ。

8) $1 \in \mathbb{R}$ について、$\forall v \in V,\ 1v = v$ である。

以上から、V は $\mathbb{R}$−線形空間である。

Q.E.D

解説 線形空間であることを示すには、和と実数倍に関し上の 8 つのことを示せばよいということです。

問 10

問題 ${}^t(x\ y) \in \mathbb{R}^2$ に対し、$x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C}$ を対応させる写像を f とする。つまり、$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ であって、$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + \sqrt{-1}y$ である。

1) この f は $\mathbb{R}-$ 線形同型写像であることを示せ。f^{-1} の具体的な表示も求めよ（f^{-1} を式で表せ)。

2) $\mathbb{R}^2$ に次のように $\mathbb{C}$ の元との積を、$v \in \mathbb{R}^2,\ \lambda \in \mathbb{C}$ のとき

$$\lambda v = f^{-1}(\lambda f(v))$$

として定める。(つまり、$v \in \mathbb{R}^2$ について $f(v)$ は $\mathbb{C}$ の元であるので、λ との積を複素数の積として定めることができる。$\lambda f(v)$ は再び $\mathbb{C}$ の元であるから、1) により $f^{-1}(\lambda f(v))$ を考えることができる。これを λv とする。）$\lambda = a + \sqrt{-1}b,\ v = {}^t(x\ y)$ とするとき、上で定めた λv を a, b, x, y で表せ。

解答 1) ${}^\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ について、$v_1 = {}^t(x_1\ y_1),\ v_2 = {}^t(x_2\ y_2)$ として、

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1 + x_2 + \sqrt{-1}(y_1 + y_2) \\ &= (x_1 + \sqrt{-1}y_1) + (x_2 + \sqrt{-1}y_2) \\ &= f(v_1) + f(v_2) \end{aligned}$$

また、${}^\forall \lambda \in \mathbb{R}$ として、

$$\begin{aligned} f(\lambda v_1) &= f\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda x_1 + \sqrt{-1}\lambda y_1 \\ &= \lambda(x_1 + \sqrt{-1}y_1) \\ &= \lambda f(v_1) \end{aligned}$$

よって、f は $\mathbb{R}-$ 線形写像である。

写像 $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ を $g(x + \sqrt{-1}y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ として定めるとき、

$$f \circ g(x + \sqrt{-1}y) = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + \sqrt{-1}y$$

$$g \circ f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(x + \sqrt{-1}y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

つまり

$$\begin{aligned} f \circ g &= \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \\ g \circ f &= \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \end{aligned}$$

よって、f が $\mathbb{R}-$ 線形同型写像であることが示された。

上の議論から $f^{-1} = g$ であるので、

$$\boldsymbol{f^{-1}(x + \sqrt{-1}y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

2)

$$\begin{aligned} \lambda v &= f^{-1}(\lambda f(v)) \\ &= f^{-1}(\lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \\ &= f^{-1}(a + \sqrt{-1}b)(x + \sqrt{-1}y)) \\ &= f^{-1}(ax - by + \sqrt{-1}(ay + bx)) \end{aligned}$$

$$\therefore \boldsymbol{\lambda v = \begin{pmatrix} ax - by \\ ay + bz \end{pmatrix}}$$

解説 線形同型の定義を押さえておくこと。直感的には「行き先が分かれば元の場所も分かる」写像。

理論面から見ると、何かわけの分からない線形空間を線形同型写像で別のよく知っている線形空間に移すことで、間接的にもとの線形空間の性質を調べられる、というご利益があります。

問 11

問題 講義でも扱ったように、K^n から K^m への任意の $K-$ 線形写像 f は、$M_{m,n}(K)$ のある元 A_f を用いて $f(v) = A_f v$ と一意的に表される。ここで、$M_{m,n}(K)$ は行列の和、K の元との積により K-線型空間であったから、

i) f, g を K^n から K^m への K-線型写像とするとき、$f+g$ を (m,n)-行列 $A_f + A_g$ で表される K-線型写像

ii) f を K^n から K^m への K-線型写像、$\lambda \in K$ とするとき、λf を λA_f で表される K-線型写像

としてそれぞれ定める。このとき、

1) $v \in K^n$ について $(f+g)(v)$ を $f(v), g(v)$ のみで表せ。

2) $v \in K^n$, $\lambda \in K$ について $(\lambda f)(v)$ を $f(v), \lambda$ のみで表せ。

結論 1) $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$

2) $(\lambda f)(v) = \lambda(f(v))$

注意 この問題は、問 12 のための布石としてピックアップしています。そのためここでは結論を書くにとどめていますが、本来ならちゃんと論証しなければいけないことに注意してください。

問 12

問題 $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ で K^n から K^m への K-線型写像全体の集合を表す。

1) 問 11 の演算で $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ は K-線型空間になることを示せ。

2) 更に、問 11 で与えられる $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ の元と $M_{m,n}(K)$ の元の対応は K-線型同型であることを示せ。

解答 1) 一般に、K-線型写像 f に対応する行列を A_f とあらわすものとする。

(a) $^\forall f, g, h \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ について、

$$\begin{aligned}((f+g)+h)(v) &= ((A_f + A_g) + A_h)v \\ &= (A_f + (A_g + A_h))v \\ &= (f + (g+h))(v)\end{aligned}$$
$$\therefore (f+g)+h = f+(g+h)$$

(b) $^\forall f, g \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ について、

$$\begin{aligned}(f+g)(v) &= (A_f + A_g)v \\ &= (A_g + A_f)v \\ &= (g+f)(v)\end{aligned}$$
$$\therefore f+g = g+f$$

(c) $o(v) = Ov$ とすると、$^\forall f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ について、

$$\begin{aligned}(f+o)(v) &= (A_f + O)v \\ &= A_f v \\ &= f(v)\end{aligned}$$

よって、$f + o = f$ なので、零ベクトル $o \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ が存在する。

(d) $^\forall f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ に対し、$g(v) = (-A_f)v$ とすると、

$$\begin{aligned}(f+g)(v) &= (A_f - A_f)v \\ &= Ov \\ &= o(v)\end{aligned}$$
$$\therefore f+g = o$$

(e) $^\forall \lambda, \mu \in K, {}^\forall f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ について、

$$\begin{aligned}((\lambda+\mu)f)(v) &= (\lambda+\mu)(f(v)) \\ &= (\lambda+\mu)A_f v \\ &= (\lambda A_f + \mu A_f)v \\ &= \lambda A_f v + \mu A_f v \\ &= \lambda(f(v)) + \mu(f(v)) \\ &= (\lambda f)(v) + (\mu f)(v) \\ &= (\lambda f + \mu f)(v)\end{aligned}$$
$$\therefore (\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f$$

(f) $^\forall \lambda \in K,\ {}^\forall f, g \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ について、

$$\begin{aligned}(\lambda(f+g))(v) &= (\lambda(A_f + A_g))v \\ &= (\lambda A_f + \lambda A_g)v \\ &= \lambda A_f v + \lambda A_g v \\ &= \lambda(f(v)) + \lambda(g(v)) \\ &= (\lambda f + \lambda g)(v)\end{aligned}$$
$$\therefore \lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$$

(g) $^\forall \lambda, \mu \in K, {}^\forall f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ について、

$$\begin{aligned}((\lambda\mu)f)(v) &= ((\lambda\mu)A_f)v \\ &= (\lambda(\mu A_f))v \\ &= \lambda(\mu f)(v) \\ &= (\lambda(\mu f))(v)\end{aligned}$$

$$\therefore (\lambda\mu)f = \lambda(\mu f)$$

（h） ${}^{\forall} f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ について、

$$\begin{aligned}(1f)(v) &= (1A_f)v \\ &= A_f v \\ &= f(v)\end{aligned}$$

$$\therefore 1f = f$$

以上より、$\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ は K-線型空間である。

Q.E.D

2) $f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ に対し、$\Phi(f) = A_f \in M_{m,n}(K)$ と定めると、

$${}^{\forall} f, g \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m), \Phi(f+g) = A_{f+g} = A_f + A_g = \Phi(f) + \Phi(g)$$

$${}^{\forall} f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m), {}^{\forall}\lambda \in K, \Phi(\lambda f) = A_{\lambda f} = \lambda A_f = \lambda\Phi(f)$$

より、Φ は K-線型写像である。

また、$A_f \in M_{m,n}(K)$ に対し、$\Psi(A_f) = f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ と定めると、

$${}^{\forall} A_f, A_g \in M_{m,n}(K),\ \Psi(A_f + A_g) = \Psi(A_{f+g}) = f + g = \Psi(A_f) + \Psi(A_g)$$

$${}^{\forall} A_f \in M_{m,n}(K),\ {}^{\forall}\lambda \in K,\ \Psi(\lambda A_f) = \Psi(A_{\lambda f}) = \lambda f = \lambda\Psi(A_f)$$

より、Ψ は K-線型写像である。

$\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)}$, $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{M_{m,n}(K)}$ となるので、

$\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ の元と $M_{m,n}(K)$ の元との対応は K-線型同型である。

Q.E.D

04/5/12 のセット

問1 3)

問題 次の行列の階数 (rank) を求めよ。

3) $\begin{pmatrix} t & s \\ 0 & u \end{pmatrix}$ 但し、$t, s, u \in \mathbb{R}$

解答 (1) $t \neq 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} t & s \\ 0 & u \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行目を}\frac{1}{t}\text{倍}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{s}{t} \\ 0 & u \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{s}{t}\text{倍を引く}]{2\text{ 列目から }1\text{ 列目の}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

より、

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} t & s \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{cases} \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \ (u = 0\text{ のとき}) \\ \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \ (u \neq 0\text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

(2) $t = 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} t & s \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & u \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{入れ替える}]{1\text{ 列目と }2\text{ 列目を}} \begin{pmatrix} s & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix}$$

(I) $s \neq 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{s}\text{倍する}]{1\text{ 行目を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[u\text{ 倍を引く}]{2\text{ 行目から }1\text{ 行目の}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

(II) $s = 0$ かつ $u \neq 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{入れ替える}]{1\text{ 行目と }2\text{ 行目を}} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{u}\text{倍する}]{1\text{ 行目を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

(III) $s = 0$ かつ $u = 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ u & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

以上から、$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} t & s \\ 0 & u \end{pmatrix}$ は、
$t \neq 0, u = 0$ のとき 1; $t \neq 0, u \neq 0$ のとき 2;
$t = s = u$ のとき 0; $t = 0$ かつ $(s \neq 0$ または $u \neq 0)$ のとき 1 となる。

別解 $A = \begin{pmatrix} t & s \\ 0 & u \end{pmatrix}$ とする。

$$\mathrm{rk}A = 2 \Longleftrightarrow \det A \neq 0 \Longleftrightarrow ts \neq 0 \Longleftrightarrow t \neq 0, s \neq 0$$

また、1 つでも 0 でない成分があれば、「ある 1 次小行列式が 0 でない」ことになり、それは $\mathrm{rk}A \geq 1$ を意味するので、

$$\mathrm{rk}A = 0 \Longleftrightarrow s = t = u = 0$$

$\mathrm{rk}A$ は 0,1,2 の値しかとりえないので、

$$\mathrm{rk}A = \begin{cases} 0 & (s = t = u = 0) \\ 2 & (s \neq 0, t \neq 0) \\ 1 & (\text{その他}) \end{cases}$$

解説 正直に場合分けする**解答**の解き方が普通かもしれませんが、**別解**のように楽をすることもできます。たとえば「$\left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{smallmatrix}\right)$ の階数は？」と問われたときなど、小行列式のお世話にならざるを得ないでしょう。階数を求めるのにこのような方法があることも心の隅に置いておくとよいかもしれません。
この方法を用いるのに、意識するとちょっと便利になる（かもしれない）事実を問にしておきます。たぶん簡単に証明できるでしょう（ヒント：余因子展開）。

問・全ての r 次小行列式が 0 ならば、任意の $r' > r$ について、全ての r' 次小行列式は 0 である。このことを示せ。

問 6

問題 $V = K^n,\ W = K^m$ とし、$f : V \to W$ を $K-$線形 同型写像とする。このとき、f は全単射であることを示せ。すなわち、

i) $^{\forall}w \in W,\ ^{\exists}v \in V \ \ \text{s.t.}\ \ f(v) = w$

ii) $v_1, v_2 \in V,\ f(v_1) = f(v_2)(\in W) \Longrightarrow v_1 = v_2$

が成り立つことを示せ（両方示すこと）。

解答 $f : V \to W$ は $K-$線形 同型写像なので、その逆写像を f^{-1} として

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_W \tag{1}$$
$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V \tag{2}$$

が成り立つ。

まず i) を示す。

(1) から $^{\forall}w \in W,\ f \circ f^{-1}(w) = w$ であるので、

$$^{\forall}w \in W,\ ^{\exists}v \in V \ \ \text{s.t.}\ \ f(v) = w(v = f^{-1}(w))$$

次に ii) を示す。

(2) から $^{\forall}v_1, v_2 \in V,\ f^{-1} \circ f(v_1) = v_1, f^{-1} \circ f(v_2) = v_2$ であるので、

$$f(v_1) = f(v_2) \Longrightarrow v_1 = v_2$$

が成り立つ。

解説 証明で、V, W は $K-$線形空間 でさえあればよいので、一般に「$K-$ 線形同型写像は全単射である」ことが分かります。同型とは要するに「結果（行き先）をみれば元に戻せる」ということですから、実は当たり前のことを言っているんですね。

問 7

問題 $V=K^n,\ W=K^m$ とする。また、$\varphi: V\to W$ を $K-$ 線型写像であって、さらに全単射であるとする。つまり、φ は問 6 の i), ii) の性質を持つとする。このとき、$\varphi^{-1}: W\to V$ を $\varphi^{-1}(w)=(\varphi(v)=w$ となるような唯一の $v)$ と定めると、φ^{-1} は $K-$ 線型写像であって、$\varphi^{-1}\circ\varphi=\mathrm{id}_V,\ \varphi\circ\varphi^{-1}=\mathrm{id}_W$ が成り立つことを示せ。

解答 まず、φ^{-1} が $K-$ 線型写像であることを示す。

${}^\forall w_1,w_2\in W$ について、$\varphi(v_1)=w_1,\varphi(v_2)=w_2$ として、

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(w_1+w_2)&=(\varphi(v)=w_1+w_2\text{となる唯一の }v)\\&=v_1+v_2\quad(\because \varphi(v_1+v_2)=\varphi(v_1)+\varphi(v_2)=w_1+w_2)\\&=\varphi^{-1}(w_1)+\varphi^{-1}(w_2)\end{aligned}$$

また、${}^\forall\lambda\in K$ として、

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\lambda w_1)&=(\varphi(v)=\lambda w_1\text{となる唯一の }v)\\&=\lambda v_1\quad(\because \varphi(\lambda v_1)=\lambda\varphi(v_1)=\lambda w_1)\\&=\lambda\varphi^{-1}(w_1)\end{aligned}$$

よって、φ^{-1} は $K-$ 線型写像である。

そして、${}^\forall v_3\in V$ について、$\varphi(v_3)=w_3$ とすると

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}\circ\varphi(v_3)&=\varphi^{-1}(w_3)\\&=v_3\end{aligned}$$

${}^\forall w_1\in W$ について、$\varphi(v_1)=w_1$ として（このような $v_1\in V$ は唯一である)、

$$\begin{aligned}\varphi\circ\varphi^{-1}&=\varphi(v_1)\\&=w_1\end{aligned}$$

であるので、$\varphi^{-1}\circ\varphi=\mathrm{id}_V,\ \varphi\circ\varphi^{-1}=\mathrm{id}_W$ が成り立つ。

解説 問 6 同様、ほとんど当たり前の命題です。なお、V,W が一般の $K-$ 線型空間の場合も成り立ちます。この命題は、逆行列の定め方をも示唆しています。

問9

問題 A を (m,n) 型の行列、$T \in GL(m;K)$, $S \in GL(n;K)$ とする。このとき、$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}TA = \mathrm{rank}AS = \mathrm{rank}TAS$ であることを示せ。

解答 ① T, S は正則行列であるから、T, S は基本行列の積の形にかける。

② A の rank は基本変形の仕方によらず一意的に定まる。さらに基本変形を行うことは、基本行列をかけることに対応する。

①, ② から、A と、A に基本行列をかけた TA, AS, TAS の rank はすべて等しい。

Q.E.D

解説 この命題は、ある正方行列が正則かどうかを掃きだし方で判定するときの理論的基礎となっています。証明も大切なので、よく理解してください。

問 12

問題 X_n を正則でかつ各成分は 0 または 1 であるような n 次正方行列の集合とする。

1) X_2 の元をすべて書き出せ。

2) X_3 の部分集合 Y を $Y = \left\{ A \in X_3 \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\}$ で定める。このとき Y に属する元の個数を求めよ。

解答 1)

$$X_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right\}$$

2) $A = (a_{ij})$ とする。A を第 1 列について余因子展開することにより、

$\det A = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ が得られる。よって $\det A \neq 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ だが、

1) の 16 個の 2 次正方行列のうち行列式が 0 でないものは 6 つだから、$a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33}$ の組み合わせは 6 通り。

また a_{12}, a_{13} は任意でよいから、結局 Y の元の個数は $2 \times 2 \times 6 = \mathbf{24}$ である。

解説 余因子展開でスマートに数え上げましょう。

04/5/26 のセット

問2

問題 $A \in M_n(K),\ b = K^n$ とする。このとき、列ベクトル $x \in K^n$ についての一次方程式 $Ax = b$ が任意の b について解を持つための必要十分条件は $A \in GL(n;K)$ であることを示せ。

解答

- 十分であること
  $A \in GL(n;K)$ のとき、$Ax = b \Longleftrightarrow x = A^{-1}b$ なので、この方程式は任意の b に対し解 $x = A^{-1}b$ をもつ。
- 必要であること
  $A \notin GL(n;K)$ のとき、行列 $\begin{pmatrix} A & \vdots & b \end{pmatrix}$ を左基本変形して $(n,1),(n,2),\cdots,(n,n)$ 成分を全て 0 にできる。
  しかしこのとき、$(n,n+1)$ 成分が 0 にならないような b が存在する。
  なぜなら、仮に全ての $b \in K^n$ について、この左基本変形により $(n,n+1)$ 成分が 0 になったとすれば、これはもとの b の第 n 成分が、第 1〜$(n-1)$ 成分により一意に定まることを意味する。ところが、K^n には、第 1〜$(n-1)$ 成分が等しいが第 n 成分が異なるような元が存在する (たとえば ${}^t(0\ 0\ \cdots\ 0\ 1)$ と ${}^t(0\ 0\ \cdots\ 0\ 2)$) ので、これはありえない。
  さて、$(n,n+1)$ 成分が 0 にならないような b について、$Ax = b$ には解が存在し得ないから、$A \in GL(n;K)$ は必要条件でもある。

Q.E.D

問3 2)

問題 次の方程式において、解が存在しないような a, b の範囲を平面に図示せよ。

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & b \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

解答

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & b \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \widetilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -1 \end{pmatrix},\ \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 3 & 1 & b & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

とすると、方程式は $\widetilde{A}\widetilde{x} = 0$ となり、これが解を持たない条件は $\mathrm{rank}\, A \neq \mathrm{rank}\, \widetilde{A}$ である。

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & b \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[\text{1 列目を掃きだす}]{\text{(1,1) 成分を要とし}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -5 & b-3a \\ 0 & -5 & 1-2a \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[\text{1 行目を掃きだす}]{\text{(1,1) 成分を要とし}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & b-3a \\ 0 & -5 & 1-2a \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[\text{(2,2) 成分を要とし 2 行目を掃きだす}]{\text{3 行目から 2 行目を引き 2 行目を} -1/5 \text{ 倍し、}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-b+1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

により、$\mathrm{rank}\, A = \begin{cases} 2 & (a-b+1=0) \\ 3 & (a-b+1 \neq 0) \end{cases}$ となる。また、$\widetilde{A}$ に基本変形を施し、

$$\begin{aligned}
\widetilde{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 3 & 1 & b & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[\text{1 列目を掃きだす}]{\text{(1,1) 成分を要とし}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & -5 & b-3a & -5 \\ 0 & -5 & 1-2a & -6 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[\text{1 行目を掃きだす}]{\text{(1,1) 成分を要とし}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & b-3a & -5 \\ 0 & -5 & 1-2a & -6 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[\text{(2,2) 成分を要とし 2 行目を掃きだす}]{\text{3 行目から 2 行目を引き 2 行目を} -1/5 \text{ 倍し、}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b+1 & -1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[\text{3 列目を} -1 \text{ 倍する}]{\text{3,4 列目を入れ替え}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-b+1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[a-b+1 \text{ 倍を引く}]{\text{4 列目から 3 列目の}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

したがって、常に $\mathrm{rank}\, \widetilde{A} = 3$ である。

以上から、$\mathrm{rank}\, A \neq \mathrm{rank}\, \widetilde{A}$ となるのは $\boldsymbol{a - b + 1 = 0}$ のときである。

図示は省略する。[*1]

解説 プリントの「注意」にもありましたが、A が正則でなくても方程式が解を持ちえます。

[*1] 図を張るのが面倒だったので……。簡単だからいいでしょう。

問5

問題 1) 有理数を成分にもつ正則行列 A に対し、逆行列 A^{-1} もまた有理数を成分にもつ行列となることを示せ。

2) 正則行列 A とその逆行列 A^{-1} がともに整数を成分にもつ行列であるとき、A の各行（各列）について、その行（列）に含まれる整数たちは互いに素（± 1 のみを公約数にもつ）であることを示せ。

解答 1) A の余因子行列を $\widetilde{A}$ とすると、

$$A^{-1} = \frac{\widetilde{A}}{\det A}$$

である。$\widetilde{A}$ の各成分と $\det A$ は、いずれも有理数の和・積のみで表されるから有理数である。したがって、A^{-1} の各成分も有理数である。

Q.E.D

2) A のある行または列の全成分が公約数 $d > 1$ をもったとすると、その行（または列）の全成分を d で割った行列を A' として

$$\det A = d \det A'$$

となる。$A \cdot A^{-1} = I_n$ より $\det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$

$$\therefore d \cdot \det A' \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

ところが、A', A^{-1} はいずれも整数を成分にもつので、その行列式も整数でなければならない。しかし、$d > 1$ より上の式の左辺の絶対値は 1 を超えてしまい、矛盾。

以上、背理法により示された。

Q.E.D

解説 $GL_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{R})$ はそれぞれ $\mathbb{C}$-線型空間、$\mathbb{R}$-線型空間ですが、1) で $GL_n(\mathbb{Q})$ が $\mathbb{Q}$-線型空間であることが示されます（もちろん 1) だけでは不十分ですが、あとの条件はほぼ明らかでしょう）。

04/6/09 のセット

問 4

問題 $v_1, \cdots, v_l \in K^n$ が K-上一次独立であるとは、$a_1, \cdots, a_l \in K$ とするとき

$$a_1 v_1 + \cdots + a_l v_l = 0 \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_l = 0$$

が成り立つことであった。これにならって、$v_1, \cdots, v_l \in K^n$ が K-上一次従属であるということを数式（論理式）で表せ。

解答

$$^{\exists}a_1, \cdots, a_l \in K \quad \text{s.t.} \quad a_1 v_1 + \cdots + a_l v_l = 0,\ (a_1, \cdots, a_l) \neq 0$$

解説 一次独立の条件は

$$^{\forall}a_1, \cdots, a_l \in K, (a_1 v_1 + \cdots + a_l v_l = 0 \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_l = 0)$$

で表されます。一般に $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (Q \vee \neg P)$ ですから、これを否定すれば解答のようになります。

問 9

問題 1) $A \in M_n(\mathbb{R})$ が $A^tA = I_n$ を満たすとすると、A は正則であって、$\det A = \pm 1$ であることを示せ。

2) $A \in M_n(\mathbb{C})$ が $A^t\overline{A} = I_n$ を満たすとすると、A は正則であって、$|\det A| = 1$ であることを示せ。

解答 1) $A^tA = I_n$ より、$\det A^tA = \det I_n$ なので $\det A \det {}^tA = 1$

したがって $\det {}^tA = \det A$ なので、$(\det A)^2 = 1 \therefore \det A = \pm 1$

また $\det A \neq 0$ なので、A は正則である。

Q.E.D

2) $A^t\overline{A} = I_n$ より、$\det A^t\overline{A} = \det I_n \therefore \det A \det {}^t\overline{A} = 1$

$\det {}^tA = \det A$ より、$\det {}^t\overline{A} = \det \overline{A}$

また、$\det \overline{A} = \overline{\det A}$ より、$\det {}^t\overline{A} = \overline{\det A}$

よって、$\det A \overline{\det A} = 1$ すなわち $|\det A|^2 = 1$

$|\det A| \geq 0$ より、$|\det A| = 1$

また、$\det A \neq 0$ なので、A は正則である。

Q.E.D

解説 1) の性質を持つ行列を直交行列、2) の性質を持つ行列をユニタリ行列といいます。$A \in M_n(\mathbb{R})$ なら ${}^t\overline{A} = {}^tA$ なので、直交行列はユニタリ行列です。

問 10

問題 任意の n 次の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ はいくつかの互換の積で表されることを示せ。

解答 $(n\ \ \sigma(n)) \circ \cdots \circ (2\ \ \sigma(2)) \circ (1\ \ \sigma(1))$ について、これは $\sigma(1)$ を 1 に、$\sigma(2)$ を 2 に、$\cdots$、$\sigma(n)$ を n に入れ替える置換であるから、結局 $\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)$ を $1, 2, \cdots, n$ に並べ替える置換、すなわち σ^{-1} であるといえる。ここで、$\tau = (1\ \ \sigma(1)) \circ (2\ \ \sigma(2)) \circ \cdots \circ (n\ \ \sigma(n))$ とおくと、$\tau\sigma^{-1} = 1_n$ なので $\tau = \sigma$ である。

このように、σ が互換の積で表された。

Q.E.D

別解 n に関する数学的帰納法で示す。

まず $n = 2$ のとき、$\mathfrak{S}_2 = \{1_2, (1\ \ 2)\}$ だが $1_2 = (1\ \ 2) \circ (2\ \ 1)$, $(1\ \ 2)$ は互換そのものであるから、成り立つ。

つぎに $n = k$ で成り立つと仮定して、$n = k + 1$ でも成り立つことを示す。

$i = \sigma^{-1}(k+1)$、すなわち i は $\sigma(i) = k + 1$ なる唯一の i とする。

このとき置換 $\sigma' = \sigma \circ (i\ \ k+1)$ を考えると、$\sigma'(k+1) = \sigma(i) = k + 1$ なので、

結局 1 から k までの置換とみることができる。

よって帰納法の仮定より σ' は互換の積で表せるから、

$\sigma = \sigma' \circ (i\ \ k+1)$ も互換の積で表せる。

Q.E.D

解説 直観的に、どうすれば互換の積で表せるかというのは想像がつくでしょう。

どう証明するかですが、演習プリントの「ヒント」に従えば上の**解答**のようにかけます。

万一困ったら間接的に**別解**のようにも示せますが、**解答**のほうが簡潔だし、具体的に表示を求めてるので優れていますね。

蛇足ですが、この命題の逆「任意の互換の積は置換となる」(成り立つことは明らかですね)のおかげで、安心してあみだくじができるわけです。

問 11

問題 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して、K-線形写像 $f_\sigma : K^n \to K^n$ を

$$f_\sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ x_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

で定める。f_σ を行列表示し、その行列を F_σ とするとき、$\det F_\sigma$ を求めよ。

解答 $F_\sigma = (f_{ij})$ とおくと、$F_\sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ x_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$ の第 i 成分を見比べ

$$f_{i1}x_1 + f_{i2}x_2 + \cdots + f_{in}x_n = x_{\sigma(i)} \tag{3}$$

が成り立つ。ここで、$f_{ij} = \begin{cases} 1 & (j = \sigma(i)) \\ 0 & (j \neq \sigma(i)) \end{cases}$ と定めれば式 (3) が成り立つ。

また、線形写像に対する行列表示は一意的に定まるから、これ以外に F_σ は存在しない。

これで行列表示が求まった。

さて、次に行列式を求めよう。定義から、

$$\det F_\sigma = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} (\mathrm{sgn}\tau) f_{1\tau(1)} f_{2\tau(2)} \cdots f_{n\tau(n)} \tag{4}$$

であるが、$\tau \neq \sigma$ のとき $\exists i, \tau(i) \neq \sigma(i)$ より $\exists i, f_{i\sigma(i)} = 0$ であるから、式 (4) の右辺の $n!$ 項のうち 0 でないのは $(\mathrm{sgn}\sigma) f_{1\sigma(1)} \cdots f_{n\sigma(n)} = \mathrm{sgn}\sigma$ のみ。

したがって、$\det F_\sigma = \mathrm{sgn}\sigma$ である。

解説 行列式を求める段で、$\det F_\sigma = \mathrm{sgn}\sigma$ となるのが直観的に分かるでしょうか。0 が多い行列の行列式は一般に簡単に求められますので、実験するなり何なりして、イメージを作っておくとよいと思います。

04/6/23 のセット

問1 1)

問題 次の置換が偶置換であるか奇置換であるか判定せよ。ただし、$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ について、$\mathrm{sgn}\sigma = 1$ の時 σ は偶置換であると言い、$\mathrm{sgn}\sigma = -1$ の時 σ は奇置換であると言う。

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & n-1 & n \\ n-k+2 & n-k+3 & \cdots & n & 1 & 2 & \cdots & n-k & n-k+1 \end{pmatrix}$

ただし $1 \leq k \leq n$

解答 与えられた置換を σ とおく。

$$\mathrm{sgn}\sigma = \prod_{i>j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$$

において、

$\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(k-1)$ なので、$1 \leq j < i \leq k-1$ のとき

$$\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} > 0$$

また、$\sigma(k) < \sigma(k+1) < \cdots < \sigma(n)$ なので、$k \leq j < i \leq n$ のときも

$$\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} > 0$$

$k \leq i \leq n$ かつ $1 \leq j \leq k-1$ のときは $1 \leq \sigma(i) \leq n-k+1,\ n-k+2 \leq \sigma(j) \leq n$ なので

$$\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} < 0$$

よって、$\dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} < 0$ となる i, j の組は $(n-k+1)(k-1)$ 通りあり、$a = (n-k+1)(k-1)$ とおくと、

a が偶数のときは $\mathrm{sgn}\sigma = 1$ 、a が奇数のときは $\mathrm{sgn} = -1$ となる。

$k-1$ が偶数のとき a は偶数であり、$k-1$ が奇数のときは、

$\begin{cases} n-k+1 = n-(k-1) \text{ が偶数、つまり } n \text{ が奇数のとき} & a \text{ は偶数} \\ n-k+1 = n-(k-1) \text{ が奇数、つまり } n \text{ が偶数のとき} & a \text{ は奇数} \end{cases}$ となる。以上をまとめると、

$$\begin{cases} k \text{ が奇数のとき} & \sigma \text{は偶置換} \\ k \text{ が偶数かつ } n \text{ が奇数のとき} & \sigma \text{は偶置換} \\ k \text{ が偶数かつ } n \text{ が偶数のとき} & \sigma \text{は奇置換} \end{cases}$$

となる。

解説 置換の符号の定義が分かっていればたぶん解けると思います。

問3

問題 次のベクトルの組が $\mathbb{R}$ 上一次独立であるか、また与えられた V を生成するか調べよ。

1) $V=\mathbb{R}^3,\ v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

2) $V=\mathbb{R}^3,\ v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

3) $V=\mathbb{R}^4,\ v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

4) $V=\mathbb{R}^5,\ v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ v_4=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, v_5=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$

5) $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}|f$ は C^∞ 級 $\},\ v_0=1,\ v_1=t,\ v_2=t^2$: ここで、1 で常に 1 であるような定数函数を表す。また、t を実変数とする。

6) $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}|f$ は C^∞ 級 $\},\ v_0=1,\ v_1=t,\ v_2=t^2,\cdots,v_n=t^n$: ここで、1 で常に 1 であるような定数函数を表す。また、t を実変数とする。

7) $V=\{$ 高々 n 次の t に関する $\mathbb{R}$ 係数の多項式 $\},\ v_0=1,\ v_1=t,\ v_2=t^2,\cdots,v_n=t^n$: ここで、1 で常に 1 であるような定数函数を表す。

解答 1) $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}$ として、

$$k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0\Longrightarrow\begin{cases}k_2 & =0\\ k_1+2k_2+k_3 & =0\\ 3k_2+k_3 & =0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}k_1 & =0\\ k_2 & =0\\ k_3 & =0\end{cases}$$

より、${}^\forall k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}, k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0\Longleftarrow k_1=k_2=k_3=0$ なので、v_1,v_2,v_3 は $\mathbb{R}$ 上**一次独立である**。

また、

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

が v_1,v_2,v_3 であらわせることが与えられた V を生成するのに必要十分であるが、

$$\begin{cases}e_1= & v_1+v_2-3v_3\\ e_2= & v_1\\ e_3= & -v_1+v_3\end{cases}$$

とあらわせることから v_1,v_2,v_3 は与えられた V を**生成する**。

2) また、$a_1=1,a_2=-1,a_3=1$ とすることにより

$$a_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

が成り立つから、**一次独立でない**。

$v = \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}$ $(\in V = \mathbb{R}^3)$ に対し、

$$v = \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とあらわせたとすると、

$$\begin{cases} s &= a_1 + a_2 \\ t &= a_1 + 2a_2 + a_3 \\ u &= a_2 + a_3 \end{cases}$$

であるから、こうあらわせる V の元は $v = \begin{pmatrix} s \\ s+u \\ u \end{pmatrix}$ の形のものに限定されてしまう。

つまり、たとえば $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$ はこの形にあらわせないから、v_1, v_2, v_3 は V を**生成しない**。

3) v_1, v_2, v_3 の一次結合で表せる元は、ある $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ を用いて

$$k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2 \\ k_1 + 2k_2 + k_3 \\ 3k_2 + k_3 \\ k_1 + 2k_2 \end{pmatrix}$$

の形に限られる。よって、たとえば $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ はこれらの一次結合では表せない。

よって、v_1, v_2, v_3 は V を**生成しない**。

また、上式より、$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$ のとき、

$$\begin{pmatrix} k_2 \\ k_1 + 2k_2 + k_3 \\ 3k_2 + k_2 \\ k_1 + 2k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

より、v_1, v_2, v_3 は**一次独立である**。

4) $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + k_4v_4 + k_5v_5 = 0$ とする。これを解くと、

$$k_1 = k_2 = k_3,\ k_4 = k_5 = -k_1$$

を得るから、たとえば $k_1 = k_2 = k_3 = 1,\ k_4 = k_5 = -1$ としても上の式は成り立つ。よって、$v_1, \cdots, v_5$ は**一次独立ではない**。

また、V を生成するには V の標準基底 $e_1, \cdots, e_4$ が $v_1, \cdots, v_5$ の一次結合で表せれば十分だが、

$$\begin{cases} e_1 &= v_1 + \frac{5}{2}v_2 - 3v_3 - \frac{3}{2}v_4 \\ e_2 &= v_1 + \frac{3}{2}v_2 - \frac{3}{2}v_4 \\ e_3 &= -v_1 - \frac{1}{2}v_2 + v_3 + \frac{1}{2}v_4 \\ e_4 &= -\frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_4 \end{cases}$$

であるから、これらは V を**生成する**。

6) $t^{n+1} \in V$ であるが、これは $1, t, \cdots, t^n$ の一次結合では表せない。よって、これらは V を **生成しない**。
また、$a_i \in \mathbb{R}(i = 0, \cdots, n)$ に対し $a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \cdot 1 = 0$ ならば、$a_n = \cdots = a_0 = 0$ なので、$1, t, \cdots, t^n$ は**一次独立である**。

5) 6) の $n = 2$ の場合なので、v_0, v_1, v_2 は**一次独立であり**、 V を**生成しない**。

7) 6) と同様、$v_0, \cdots, v_n$ は**一次独立である**。
V の定義から、V の任意の元 v は $a_i \in \mathbb{R}(i = 0, \cdots, n)$ を用いて

$$v = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0 \cdot 1$$

とかける。したがって、$v_0, \cdots, v_n$ は V を**生成する**。

解説 具体的な線型空間とベクトルの組が与えられたときに、「一次独立」・「生成」といった事柄が成り立つかどうかの確認の練習です。
さて、ここで Quiz です。次の各主張は正しいでしょうか？正しくないなら、正しくなるよう修正してください（条件を付け加える、結論の主張を弱めるなど）。そして、できれば証明もしてみるとよいと思います（講義で証明されているものもある）。

ある K-線型空間 V と、その元 n 個の組 E が与えられたとき、

a) $\dim V \leq n \Longrightarrow E$ は V を K 上生成する

b) $\dim V > n \Longrightarrow E$ は V を K 上生成しない

c) E が V を K 上生成する $\Longrightarrow \dim V \leq n$

d) E が V を K 上生成しない $\Longrightarrow \dim V > n$

e) $\dim V = n$ かつ、E が V を K 上生成する $\Longrightarrow E$ は K 上一次独立

問 4

問題 $V = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ は } C^\infty \text{級であって} \dfrac{df}{dt} = \lambda f \text{ を満たす。} \right\}$ とする。ここで t は函数の変数であって、$\lambda \in \mathbb{R}$ である。このとき V の $\mathbb{R}$ 上の基底を求めよ。必要であれば $\dfrac{df}{dt} = \lambda f$ の一般解は $f(t) = ce^{\lambda t},\ c \in \mathbb{R}$ で与えられることを用いてよい。

解答 問題文の後半から、$V = \{ f \mid f(t) = ce^{\lambda t} \}$ である。
いま函数 $f_0 = e^{\lambda t}$ を考えよう。もちろん $f_0 \in V$ である。
また、任意の $f = ce^{\lambda t} \in V$ に対し $f = cf_0$ であるから、f_0 は V を生成する。
また明らかに f_0 は、1 つの函数からなる組と見たとき 1 次独立なので、$f_0 = \boldsymbol{e^{\lambda t}}$ は V の基底のひとつとなっている。

解説 線形空間 V のいくつかの元の組が「一次独立」「V を生成する」の両方を満たしているとき、この組は V の基底である、といいます。この場合は、「いくつかの元」は実は「ひとつの元」です。(解答の日本語に苦労しますね・・・)
問題の表現についてですが、一般に基底は何通りも存在するものなので、ただ「基底を求めよ」といわれたら「一組求めよ」か「考えうる限り全て求めよ」かはっきりしません。試験ではこのようなあいまいな聞き方をすることはないでしょう(というか、全部求める、といっても一般には無限に存在しちゃうので、一組求めよ、という形で出ると思います)。なお、この問題の V については、任意の 1 つの元が V の基底となります。

04/7/02 のセット

問1

問題 V を K-線型空間とし、V の元 $v_1, \cdots, v_l$ が K 上 V を生成すると仮定する。このとき、V の元 $w_1, \cdots, w_k$ と lk 個の K の元 $\{a_{ij}\}$, $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$ が存在して $v_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} w_i$ が任意の j について成り立つとする。このとき $w_1, \cdots, w_k$ は K 上 V を生成することを示せ。

解答 $v_1, \cdots, v_l$ が K 上 V を生成するから、任意の $v \in V$ は、適切な $c_1, \cdots, c_l \in K$ を用いて

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_l v_l$$

とかける。いま $v_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} w_i$ であるから、

$$\begin{aligned} v &= c_1 \sum_{i=1}^{k} (a_{i1} w_i) + c_2 \sum_{i=1}^{k} (a_{i2} w_i) + \cdots + c_l \sum_{i=1}^{k} (a_{il} w_i) \\ &= \sum_{i=1}^{l} (c_i a_{1i}) w_1 + \sum_{i=1}^{l} (c_i a_{2i}) w_2 + \cdots + \sum_{i=1}^{l} (c_i a_{ki}) w_k \end{aligned}$$

となり、${}^{\forall} n,\ \sum_{i=1}^{l} c_i a_{ni} \in K$ なので、任意の $v \in V$ が $w_1, \cdots, w_k$ の一次結合で表せることになる。
以上から、$w_1, \cdots, w_k$ は K 上 V を生成する。

Q.E.D

解説 主張は、与えられたベクトルの組がある線型空間 V を生成するか調べるとき、V の標準基底がそのベクトルたちの一次結合で表せれば十分、という命題の一般化です。
なお、$A = (a_{ij}) \in M_{kl}(K)$ のとき、$\operatorname{rank} A$ とは、この問題の主張の仮定が成り立つような最小の k です。

問2

問題 $f : K^n \to K^m$ を K-線型写像とする。f の行列表示を A とするとき、以下を示せ。

1) $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} f$

2) $n - \operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Ker} f$

解答 1) $\operatorname{Im} f$ の定義から、$\operatorname{Im} f$ は $x \in K^n$ を未知ベクトルとする一次方程式系

$$Ax = c$$

が解を持つような $c \in K^m$ の元全体の集合である。いま $\widetilde{A} = (A : c)$ に左基本変形と、第 $n+1$ 列以外の列の入れ替えのみを施して

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & & 0 & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_m \end{pmatrix}$$

の形にできる（但し $r = \operatorname{rank} A$）。さて、いま、$Ax = c$ が解を持つ条件は $d_{r+1} = \cdots = d_m = 0$ である。これは、c の m 個の成分のうちある $m - r$ 個が、ほかの成分の線型結合でかける事を意味する。そして、$\operatorname{Im} f$ は、この基本変形により $d_{r+1} = \cdots = d_m = 0$ となるような c の集合であるともかける。そこで、$k = 1, \cdots, r$ として、この基本変形により

$$d_i = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

となるような c を c_k とかくと、$c_1, \cdots, c_r$ は一次独立であり、また $\dim \operatorname{Im} f$ を生成する。従って、この r 本のベクトルは $\dim \operatorname{Im} f$ の基底となっているから、$\dim \operatorname{Im} f = r = \operatorname{rank} A$

Q.E.D.

2) $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim K^n = n$ であり、また 1) より $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} A$ なので、$\dim \operatorname{Ker} f = n - \operatorname{rank} A$

Q.E.D.

別解 2) $\operatorname{Ker} f$ の定義から、$\operatorname{Ker} f$ は $x \in K^n$ を未知ベクトルとする一次方程式系

$$Ax = 0$$

の解集合である。A に左基本変形と、列の入れ替えのみを施して

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & & 0 & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

という形の行列に変形できる。ここで $r = \mathrm{rank}\, A$ である。いま

$$k_{r+1} = \begin{pmatrix} b_{1,r+1} \\ b_{2,r+1} \\ \vdots \\ b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ k_{r+2} = \begin{pmatrix} b_{1,r+2} \\ b_{2,r+2} \\ \vdots \\ b_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots, k_n = \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、$\mathrm{Ker}\, f$ の元はこの $n-r$ 本のベクトルで生成される。また、明らかにこれらは一次独立なので、$\mathrm{Ker}\, f$ の基底である。従って、$\dim \mathrm{Ker}\, f = n - r = n - \mathrm{rank}\, A$

Q.E.D.

解説 1) か 2) を示せば、$\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = n$ から、もう一方は自動的に導けます。もちろん、1) と 2) を独立に示すこともできます。ここでは、一応問題の順番から 1) から導きましたが、楽なのは 2) を導いて、上式から 1) をいう方でしょう。

問3

問題 以下の $f : K^n \to K^m$ に対して、像と核の次元を決定し、各々の基底を一組ずつ求めよ。必要であれば問 2 の結果を用いてよい。

1) $f : K^4 \to K,\ f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = x + 2y + 3z + 4w$

2) $f : K^4 \to K^2,\ f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y-w \end{pmatrix}$

3) $f : K^4 \to K^2,\ f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z-w \\ 3x+3y-3z-3w \end{pmatrix}$

4) $f : K^4 \to K^3,\ f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ y+z+w \\ z+w+x \end{pmatrix}$

5) $f : K^4 \to K^4,\ f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z+w \\ y+z+w \\ z+w \\ w \end{pmatrix}$

解答 1) $^\forall x \in K,\ f\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x$ なので、$\operatorname{Im} f = K$ である。

従って、$\mathbf{dim\,Im}\,\boldsymbol{f} = \mathbf{1}$ であり、基底は、たとえば $\{\mathbf{1}\}$ 。
すると $\mathbf{dim\,Ker}\,\boldsymbol{f} = 4 - 1 = \mathbf{3}$ であるから、$\operatorname{Ker} f$ の元から一次独立な 3 本のベクトルをもってきて、たとえば

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{-4} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \right\}$$

とすれば、これは $\operatorname{Ker} f$ の基底である。

2) いま

$$^\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K^2,\ f\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = X$$

なので、$\operatorname{Im} f = K^2$ である。
従って、$\mathbf{dim\,Im}\,\boldsymbol{f} = \mathbf{2}$ であり、基底は、たとえば

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \right\}$$

である。すると、$\mathbf{dim\,Ker}\,\boldsymbol{f} = 4-2 \mathbf{= 2}$ であるから、$\mathrm{Ker}\, f$ の元から一次独立な 2 本のベクトル、たとえば

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \right\}$$

をとれば、これは $\mathrm{Ker}\, f$ の基底である。

3) いま

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = (x+y-z-w) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

であるが、一方

$$^\forall x \in K,\ f \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

なので、$\mathbf{dim\,Im}\,\boldsymbol{f} \mathbf{= 1}$ であり、基底はたとえば $\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix} \right\}$ である。

すると、$\mathbf{dim\,Ker}\,\boldsymbol{f} = 4-1 \mathbf{= 3}$ であるから、$\mathrm{Ker}\, f$ の元から一次独立な 3 本のベクトル、たとえば

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\}$$

をとれば、これは $\mathrm{Ker}\, f$ の基底である。

4) f の行列表示 F を基本変形していくと、

$$\begin{aligned} F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow[\text{行・列ともに掃きだす}]{\text{(1,1) 成分を要として}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\text{行・列ともに掃きだす}]{\text{(2,2) 成分を要として}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\text{行・列ともに掃きだす}]{\text{(3,3) 成分を要として}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とできる。また、階数は基本変形の結果のみできまり、過程によらないから、$\mathrm{rank}\, F = 3$

よって、問 2 の結果より $\mathbf{dim\,Im}\,\boldsymbol{f} = \mathrm{rank}\, F \mathbf{= 3}$ であり、また $\mathbf{dim\,Ker}\,\boldsymbol{f} = 4 - \mathrm{rank}\, F \mathbf{= 1}$ である。

そこで、$\mathrm{Im}\, f$ の元からとられた一次独立な 3 本のベクトル、たとえば

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \right\}$$

は $\mathrm{Im}\, f$ の基底であり、また $\mathrm{Ker}\, f$ の 0 でない元を 1 つとり、たとえば

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \right\}$$

とすれば、これは $\mathrm{Ker}\, f$ の基底である。

5) いま

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z+w \\ y+z+w \\ z+w \\ w \end{pmatrix} = 0$$

を仮定すると、第 4 成分に注目して $w = 0$ 。すると第 3 成分に注目して $z = 0$。同様に、第 2,1 成分に順に注目して、結局 $x = y = z = w = 0$ を得る。従って、$\operatorname{Ker} f = \{0\}$ なので、$\mathbf{dim\,Ker}\,\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$、基底は**なし**。

これより、$\mathbf{dim\,Im}\,\boldsymbol{f} = 4 - 0 \mathbf{= 4}$ であるから、$\operatorname{Im} f$ から一次独立な 4 本のベクトルをとってきたもの、たとえば

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \right\}$$

は $\operatorname{Im} f$ の基底である。

解説 解答で、次の 2 つの事実をフルに活用しました。

- $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim V$
- $\dim V = n$ ならば、n 本の一次独立な V の元をもってくれば、それらは V の基底

後者は講義で特に触れられていませんでしたが、比較的簡単に証明できるので、いい練習問題と思って証明してみるといいと思います。

問 4

問題 W_1, W_2 が K-線型空間 V の K-線型部分空間であるとする。

1) 和空間 $W_1 + W_2$ は V の K-線型部分空間であることを示せ。

2) 共通部分 $W_1 \cap W_2$ は V の K-線型部分空間であることを示せ。

3) $\mathbb{R}^5$ の部分空間 W_1, W_2 を

$$W_1 = \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 0 \end{array} \text{ の解空間} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 0 \end{array} \right\},$$

$$W_2 = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{array} \text{ の解空間} \right\}$$

で定めるとき、$W_1 + W_2$ を式で表し、その次元と基底のひとつを求めよ。

4) 3) において、$W_1 \cap W_2$ を式で表し、その次元と基底のひとつを求めよ。

解答 1) 任意の $x, y \in W_1 + W_2$ をとってきたとすると、

$$^{\exists}x_1, y_1 \in W_1,\ ^{\exists}x_2, y_2 \in W_2,\ x_1 + x_2 = x,\ y_1 + y_2 = y$$

である。従って、

$$x + y = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in W_1 + W_2$$

また、$c \in K$ に対し

$$cx = c(x_1 + x_2) = (cx_1) + (cx_2) \in W_1 + W_2$$

なので、$W_1 + W_2$ は和とスカラー倍について閉じている。
また、この和とスカラー倍は K-線型空間 V のものと同じものなので、線型空間の公理を満たす。
従って、$W_1 + W_2$ は K-線型空間である。

Q.E.D.

2) 任意の $x, y \in W_1 \cap W_2$ をとってきたとすると、

$$x, y \in W_1 \text{かつ } x, y \in W_2$$

である。従って、

$$x + y \in W_1 \text{かつ } x + y \in W_2$$

また、$c \in K$ に対し

$$cx \in W_1 \text{かつ } cx \in W_2$$

なので、$W_1 \cap W_2$ は和とスカラー倍について閉じている。
また、この和とスカラー倍は K-線型空間 V のものと同じものなので、線型空間の公理を満たす。
従って、$W_1 \cap W_2$ は K-線型空間である。

Q.E.D.

3) まず、W_1, W_2 をそれぞれ式で表すことを考える。
W_1 を定める方程式系の係数行列を左基本変形していくと、

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{入れ替え}]{1,2 \text{ 行目を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2 \text{ 倍を加える}]{2 \text{ 行目に } 1 \text{ 行目の}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-1 \text{ 倍を加える}]{1 \text{ 行目に } 2 \text{ 行目の}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となるから、

$$W_1 = \left\{ \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K \right\}$$

である。

また W_2 を定める方程式系の係数行列を左基本変形していくと、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} &\xrightarrow[-2\text{ 倍を加える}]{2\text{ 行目に }1\text{ 行目の}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -4 & 8 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[-1/3\text{ 倍する}]{2\text{ 行目を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[-2\text{ 倍を加える}]{1\text{ 行目に }2\text{ 行目の}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから、

$$W_2 = \left\{ \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in K \right\}$$

である。

さて、これより、$W_1 + W_2$ は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

で生成されることが分かる。ところが、

$$\begin{pmatrix} -13 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。そこで、これを取り除いた 4 本のベクトル

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

も、依然として $W_1 + W_2$ を生成する。しかもこれらは、これらの一次結合が 0 であるとして係数を計算すればすべて 0 になることから、一次独立でもある。 したがって、この 4 本のベクトルは $W_1 + W_2$ の基底である。すると、

$$\boldsymbol{W_1 + W_2 = \left\{ \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma_4 \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in K \right\}}$$

であり、$\mathbf{dim}(\boldsymbol{W_1 + W_2}) = \mathbf{4}$ である。

4) $W_1 \cap W_2$ を求めるには

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

を解けばよい。いまこの係数行列に左基本変形を施していくと、

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{1,2 行目を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{要として掃きだす}]{\text{1 列目を (1,1) 成分を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{要として掃きだす}]{\text{2 列目を (2,2) 成分を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{要として掃きだす}]{\text{4 列目を (3,4) 成分を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるから、

$$\boldsymbol{W_1 \cap W_2 = \left\{ \delta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \delta_1, \delta_2 \in K \right\}}$$

である。基底は

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

であるから、$\boldsymbol{\dim W_1 \cap W_2 = 2}$。

解説 一般に、K-線型空間 V の K-線型部分空間 W_1, W_2 について、

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim W_1 \cap W_2$$

が成り立ちます（ド・モルガンの法則に似ていますね）。
この問題では $\dim W_1 = \dim W_2 = 3,\ \dim(W_1 + W_2) = 4,\ \dim W_1 \cap W_2 = 2$ なので、確かに成り立っていますね。

問5

問題 1) K の元を成分とする m 行 n 列の行列全体の空間 $M_{m,n}(K)$ は行列の和と、定数倍（K の元との積）により、K-線型空間であることを示せ。$M_{m,n}(K)$ は通常このように K-線型空間とみなす。

2) （K-線型空間としての）$M_{m,n}(K)$ の K 上の基底を一組与え、$M_{m,n}$ の K 上の次元を求めよ。

解答 1) $A, B, C \in M_{m,n}(K),\ x, y \in K$ に対し、$K(= \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{C})$ の性質から、

（a） $(A+B)+C = A+(B+C)$

（b） $A+B = B+A$

（c） 零行列 $O \in M_{m,n}(K)$ に対し $A+O = O+A = A$

（d） $(-1)A \in M_{m,n}(K)$ を考えれば $A+(-1)A = O$

（e） $x(A+B) = xA+xB$

（f） $(x+y)A = xA+yA$

（g） $x(yA) = (xy)A$

（h） $1A = A$

であるので、$M_{m,n}(K)$ は題意の意味で K-線型空間である。

Q.E.D

2) $M_{m,n}(K)$ の元で、(i,j)-成分のみ 1 でほかの成分が全て 0 であるような行列を E_{ij} とする。いま mn 個の E_{ij} $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ を考えると、$c_{ij} \in K(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ に対し

$$\sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} c_{ij}E_{ij} = O$$

ならば、全ての i, j について、E_{ij} の係数 c_{ij} は 0 でなければならない。よって、mn 個の E_{ij} は一次独立である。

さらに、任意の $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ が与えられたとき、

$$A = \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} a_{ij}E_{ij}$$

であるから、これらは $M_{m,n}(K)$ を生成する。

以上から、E_{ij} $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ は $M_{m,n}(K)$ の基底のひとつである。したがって、$M_{m,n}$ は K 上 $\boldsymbol{mn}$ **次元** である。

解説 易しい問題ですが、問6・問7の布石となる問題なので取り上げておきます。

問 6

問題 V, W を（必ずしも K^n とは限らない）K-線型空間とし、V から W への K-線型写像全体を $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ であらわす。そして $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ に次のような演算を入れる：

$$(f+g)(v) = f(v)+g(v),\ f,g \in \mathrm{Hom}_K(V,W), v \in V$$
$$(\lambda f)(v) = \lambda \cdot f(v),\ \lambda \in K, f \in \mathrm{Hom}_K(V,W), v \in V$$

1) 上の演算に関して $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ は K-線型空間であることを示せ。

2) $V = K^n$, $W = K^m$ とする。$M_{m,n}(K)$ の元は、K^n から K^m への K-線型写像と 1 対 1 に対応するのであった。この対応が $\mathrm{Hom}_K(K^n,K^m)$ と $M_{m,n}(K)$ の K-線型同型写像であることを示せ。

3) K^n の標準基底を $\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n$, K^m の標準基底を $\mathbf{f}_1,\cdots,\mathbf{f}_m$ とする。このとき、次の性質を満たす K-線型写像 $\varphi_{ij} : K^n \to K^m$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ が一意的に存在することを示せ。

$$\varphi_{ij}(\mathbf{e}_k) = \begin{cases} \mathbf{f}_i & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$$

4) 3) で与えられる φ_{ij} は (i,j)-成分のみが 1 であるような $M_{m,n}(K)$ の元に対応することを示せ。

5) f を $V = K^n$ から $V = K^n$ 自身への K-線型写像とする。$\varphi \in \mathrm{Hom}_K(K^n,K^m)$ に対して、K^n から K^m への写像 $f^*\varphi$ を $(f^*\varphi)(v) = \varphi(f(v))$ と定める。このとき $f^*\varphi \in \mathrm{Hom}_K(K^n,K^m)$ であって、さらに対応 $\varphi \mapsto f^*\varphi$ は K-線型写像であることを示せ。

6) 5) において、f の表現行列を $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ とする。このとき問 7 にあるように、φ_{ij} は $\mathrm{Hom}_K(K^n,K^m)$ の K 上の基底であるので、これを認めたうえで f^* の φ_{ij} に関する行列表示を求めよ。

解答 1)

- $f+g, \lambda f$ が $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ の元であること

  $^\forall f,g \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, $^\forall v_1,v_2 \in V$ に対して

$$\begin{aligned}(f+g)(v_1+v_2) &= f(v_1+v_2)+g(v_1+v_2)\\ &= f(v_1)+f(v_2)+g(v_1)+g(v_2)\\ &= f(v_1)+g(v_1)+f(v_2)+g(v_2)\\ &= (f+g)(v_1)+(f+g)(v_2)\end{aligned}$$

  また、$^\forall f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, $^\forall v \in V$, $^\forall \lambda \in K$ に対して

$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda v) &= f(\lambda v)+g(\lambda v)\\ &= \lambda f(v)+\lambda g(v)\\ &= \lambda(f(v)+g(v))\\ &= \lambda(f+g)(v)\end{aligned}$$

  従って、$f+g$ は V から W への K-線型写像、すなわち $f+g \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ である。

  次に、$^\forall f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, $^\forall \lambda \in K$, $^\forall v_1,v_2 \in V$ に対して

$$\begin{aligned}(\lambda f)(v_1+v_2) &= \lambda \cdot f(v_1+v_2)\\ &= \lambda(f(v_1)+f(v_2))\\ &= \lambda \cdot f(v_1)+\lambda \cdot f(v_2)\\ &= (\lambda f)(v_1)+(\lambda f)(v_2)\end{aligned}$$

  であり、また $^\forall f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, $^\forall \lambda,\mu \in K$, $^\forall v^i nV$ に対して

$$\begin{aligned}(\lambda f)(\mu v) &= \lambda \cdot f(\mu v)\\ &= \lambda(\mu \cdot f(v))\\ &= \mu(\lambda \cdot f(v))\\ &= \mu(\lambda f)(v)\end{aligned}$$

  従って、λf は V から W への K-線型写像、すなわち $f+g \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ である。

- $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ が K-線型空間であること

  $f,g,h \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, $\lambda,\mu \in K$, $v \in V$ に対し、

(a) $((f+g)+h)(v)=(f+g)(v)+h(v)=f(v)+g(v)+h(v)=f(v)+(g+h)(v)=(f+(g+h)(v)$
従って、$(f+g)+h=f+(g+h)$

(b) $(f+g)(v)=f(v)+g(v)=g(v)+f(v)=(g+f)(v)$
従って、$f+g=g+f$

(c) $o:V\to W$ を、${}^{\forall}v\in V, o(v)=e_W$ （e_W は W の加法の単位元）で定めると、$(f+o)(v)=f(v)+o(v)=f(v)$ である。また $o(v)\in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ なので、$o(v)$ は $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ の加法の単位元となる。

(d) $f\in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ に対し、$-f$ を $(-f)(v)=-f(v)$ で定めると、$(f+(-f))(v)=f(v)+(-f)(v)=f(v)-f(v)=e_W$ なので、この $-f\in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ は f の加法の逆元となる。

(e) $(\lambda(f+g))(v)=\lambda(f(v)+g(v))=\lambda f(v)+\lambda g(v)=(\lambda f)(v)+(\lambda g)(v)=(\lambda f+\lambda g)(v)$
従って、$\lambda(f+g)=\lambda f+\lambda g$

(f) $((\lambda+\mu)f)(v)=(\lambda+\mu)f(v)=\lambda f(v)+\mu f(v)=(\lambda f)(v)+(\mu f)(v)=(\lambda f+\mu f)(v)$
従って、$(\lambda+\mu)f=\lambda f+\mu f$

(g) $(\lambda(\mu f))(v)=\lambda(\mu f)(v)=(\lambda\mu)f(v)=((\lambda\mu)f)(v)$
従って、$\lambda(\mu f)=(\lambda\mu)f$

(h) $(1f)(v)=1f(v)=f(v)$ 従って、$1f=f$

以上から、$\mathrm{Hom}_K(V,W)$ は K-線型空間である。

Q.E.D

2) （4/21 のセットの問 12 2) と全く同じ問題のため、省略）

3) 任意の $v\in K$ が与えられると、$v=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+\cdots+a_n\mathbf{e}_n$ なる $a_1,\cdots,a_n\in K$ が一意的に定まり、

$$\begin{aligned}\varphi_{ij}(v)&=a_1\varphi_{ij}(\mathbf{e}_1)+a_2\varphi_{ij}(\mathbf{e}_2)+\cdots+a_n\varphi_{ij}(\mathbf{e}_n)\\&=a_j\mathbf{f}_i\end{aligned}$$

である。すなわち、写像 φ_{ij} は一意的に存在する。

よって、この φ_{ij} が K-線型写像であることを示せばよい。いま任意の $v,w\in V$ をもってきて、それぞれの第 k 成分を v_k,w_k $(k=1,\cdots,n)$ とかくと、

$$\begin{aligned}\varphi_{ij}(v+w)&=(v_j+w_j)\mathbf{f}_i\\&=v_j\mathbf{f}_i+w_j\mathbf{f}_i\\&=\varphi_{ij}(v)+\varphi_{ij}(w)\end{aligned}$$

であり、また任意の $v\in V,\ c\in K$ に対して

$$\begin{aligned}\varphi_{ij}(cv)&=(cv)\mathbf{f}_i\\&=c\cdot v\mathbf{f}_i\\&=c\varphi_{ij}(v)\end{aligned}$$

が成り立つ。従って、φ_{ij} は K-線型写像である。

以上から、問題に与えられた性質を持つ K-線型写像 φ_{ij} は一意的に存在する。

Q.E.D

4) φ_{ij} に対応する $M_{m,n}(K)$ の元（行列）を A とし、k 列目をあらわす列ベクトルを a_k $(k=1,\cdots,n)$ とする。すると、$\varphi_{ij}(\mathbf{e}_k)=A\mathbf{e}_k=a_k$ である。よって、

$$a_k=\begin{cases}\mathbf{f}_i & k=j\\ 0 & k\neq j\end{cases}$$

である。いま $\mathbf{f}_i$ は第 i 成分のみ 1 で残りは全て 0 であるような列ベクトルであるから、結局 A は、j 列目の列ベクトルの第 i 成分、つまり A の (i,j)-成分のみ 1（で、残りの成分は全て 0）であるような行列である。

Q.E.D

5) • $f^*\varphi \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ なること

$f^*\varphi$ は K^n から K^m への写像であって、$^\forall v_1, v_2 \in V$ に対し、

$$\begin{aligned} f^*\varphi(v_1+v_2) &= \varphi(f(v_1+v_2)) \\ &= \varphi(f(v_1)+f(v_2)) \\ &= \varphi(f(v_1))+\varphi(f(v_2)) \\ &= f^*\varphi(v_1)+f^*\varphi(v_2) \end{aligned}$$

また、$^\forall v \in V,\ ^\forall c \in K$ に対し、

$$\begin{aligned} f^*\varphi(cv) &= \varphi(f(cv)) \\ &= \varphi(c \cdot f(v)) \\ &= c\varphi(f(v)) \\ &= c \cdot f^*\varphi(v) \end{aligned}$$

であるから、$f^*\varphi$ は K-線型である。

従って、$f^*\varphi \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ である。

• 対応 $\varphi \mapsto f^*\varphi$ が K-線型写像であること

この対応は、φ が定まれば $f^*\varphi$ も一意に定まるから、写像である。

また、$^\forall \varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m),\ ^\forall v \in K^n$ に対し、

$$\begin{aligned} f^*(\varphi+\psi)(v) &= (\varphi+\psi)(f(v)) \\ &= \varphi(f(v))+\psi(f(v)) \\ &= f^*\varphi(v)+f^*\psi(v) \\ &= (f^*\varphi+f^*\psi)(v) \end{aligned}$$

従って、$f^*(\varphi+\psi) = f^*\varphi+f^*\psi$ が成り立つ。

また、$^\forall \varphi \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m),\ ^\forall c \in K,\ ^\forall v \in K^n$ に対し、

$$\begin{aligned} f^*(c\varphi)(v) &= (c\varphi)(f(v)) \\ &= c \cdot \varphi(f(v)) \\ &= c \cdot f^*\varphi(v) \\ &= (c \cdot f^*\varphi)(v) \end{aligned}$$

従って、$f^*(c\varphi) = c \cdot f^*\varphi$ が成り立つ。

以上から、対応 $\varphi \mapsto f^*\varphi$ は K-線型写像である。

Q.E.D

6) $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ の基底を $\{\varphi_{11}, \cdots, \varphi_{m1}, \varphi_{12}, \cdots, \varphi_{m2}, \cdots, \varphi_{1n}, \cdots, \varphi_{mn}\}$ と並べているとして考える。この基底の任意の元 φ_{ij} について、

$$\begin{aligned} f^*\varphi(v) &= \varphi_{ij}(f(v)) \\ &= \varphi_{ij}(Av) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}v_k\right)\mathbf{f}_i \\ &= \sum_{k=1}^{n}\{a_{jk}(v_k\mathbf{f}_i)\} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\{a_{jk}\varphi_{ik}(v)\} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\varphi_{ik}\right)(v) \end{aligned}$$

いま $\widetilde{a_{kl}} = a_{lk}\ (1 \leq k, l \leq n)$ とかくと、上式より

$$f^*\varphi_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a_{kj}}\varphi_{ik}$$

であるから mn 次正方行列 F を、

$$F = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & {}^t\boldsymbol{A} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ & & & \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \ddots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & {}^t\boldsymbol{A} \end{pmatrix}$$

で定めると、${}^tA = (\widetilde{A_{kl}}$ であるから、F は f^* の、与えられた基底に対する行列表現となっている。

解説 難しい問題です。

1), 2) は大丈夫でしょう。1) で、V, W は数ベクトル空間とは限らないので、行列表示を持ち出せないことに注意してください。

3) は、問題の意味がとりづらかったかもしれませんが（僕はとりづらかった）、意味が分かれば 4) まで一気に行けます。

5) は routine work ですが、後半の設問が見慣れない感じですね。f^* が、$\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ から $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ への写像になっているという意識を持ってください（函数から函数を定める函数です)。

6) が最難関。というか講義でやったことから微妙に外れています。しかし、教科書の範囲にはしっかりと載っている事柄ですので（ちなみに演習書第 4 章 §5 の問題 4 (127 頁) に類題がある)、余裕があれば理解しておくと万全だと思います。mn 個の基底の並べ方で答えは当然変わってきます。特に並べ方が指定されていないので、一番うまい並べ方を探しましょう（試験で出題されるとすれば、きちんと並べ方まで指定されるはずですが)。

問 7

問題　（問 6 の続き）問 6 の φ_{ij} が $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ の基底であることを次にしたがって示せ。

方法 I

1) V, W を K-線型空間、$f : V \to W$ を K-線型同型写像とする。$e_1, \cdots, e_n$ が V の基底であれば $f(e_1), \cdots, f(e_n)$ は W の基底であることを示せ。

2) 問 6 の 2),4) を用いて、φ_{ij} が基底であることを示せ。

方法 II

3) $f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ とする。つまり、f を K^n から K^m への K-線型写像とする。このとき、

$$f = \sum_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}} a_{ij}\varphi_{ij}$$

なる $a_{ij} \in K,\ a \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ が存在することを示せ。

4) $b_{ij} \in K,\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ が

$$\sum_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}} b_{ij}\varphi_{ij} = 0$$

を満たすとすると、任意の i, j について $b_{ij} = 0$ であることを示せ。

※ 3), 4) から $\{\varphi_{ij}\}$ は $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ の基底である。従って $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ は mn 次元である。

解答　1) 今 W の任意の元を w とする。f は K-同型なので、$f(v) = w$ なる $v \in V$ が一意的に定まる。さらに、$v = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$ なる $a_1, \cdots, a_n \in K$ が存在する。このとき

$$\begin{aligned} w &= f(v) \\ &= f(a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n) \\ &= a_1f(e_1) + a_2f(e_2) + \cdots + a_nf(e_n) \end{aligned}$$

である。従って、$f(e_1), \cdots, f(e_n)$ は W を生成する。

また、$b_1, \cdots, b_n \in K$ に対し

$$b_1f(e_1) + b_2f(e_2) + \cdots + b_nf(e_n) = 0$$

であるとする。この等式は

$$f(b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n) = 0$$

と同値である。さて、f は K-線型同型なので、全単射である[*2]。ところが、いま $v \neq 0$ に対して $f(v) = 0$ になったとすると、$-v \in V$ に対しても $f(-v) = -f(v) = 0$ となってしまい、$v \neq -v$ なので、f が全単射であることに矛盾する。従って、$f(v) = 0 \Longrightarrow v = 0$ なので、$b_1e_1 + \cdots + b_ne_n = 0$ である。$e_1, \cdots, e_n$ は V の基底なので、$b_1 = \cdots = b_n = 0$ である。これで

$$b_1f(e_1) + \cdots + b_nf(e_n) = 0 \Longrightarrow b_1 = \cdots = b_n = 0$$

が示された。すなわち、$f(e_1), \cdots, f(e_n)$ は一次独立である。

以上から、$f(e_1), \cdots, f(e_n)$ は W の基底である。

Q.E.D

2) (i, j)-成分のみが 1 で、ほかは全て 0 であるような $M_{m,n}(K)$ の元（行列）を E_{ij} とかくことにする。すると、明らかに $\{E_{ij}\}$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ は $M_{m,n}(K)$ の基底である。

さて、いま写像 $T : M_{m,n}(K) \to \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ を、「$M_{m,n}(K)$ の元 A を、A に対応する K-線型写像 $f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ に写す写像」として定める。T は問 6 2) から、K-線型同型写像

[*2] 5/12 のセットの問 6 参照。問題に V, W が数ベクトル空間であると仮定してあるが、結局この仮定を使わずに証明してある

である。

問 6 4) から、$T(E_{ij}) = \varphi_{ij}$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ であるので、1) より、φ_{ij} は再び $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ の基底となる。

Q.E.D

3) 2) の T は K-線型同型なので、逆写像 T^{-1} をもつ。T^{-1} も K-線型同型であり、従って全単射である。

E_{ij} $(i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n)$ は $M_{m,n}(K)$ の基底であるから、

$$T^{-1}\left(\sum_{\substack{i=1,\cdots,m\\ j=1,\cdots,n}} a_{ij}\varphi_{ij}\right) = \sum_{\substack{i=1,\cdots,m\\ j=1,\cdots,n}} a_{ij}E_{ij}$$

は、a_{ij} がそれぞれ K 全体を動けば $M_{m,n}(K)$ 全体を動く。T^{-1} が全単射であったことに注意すると、

$$f = \sum_{\substack{i=1,\cdots,m\\ j=1,\cdots,n}} a_{ij}\varphi_{ij}$$

も $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ 全体を動く。つまり、どんな f に対してもこの式を成り立たせる a_{ij} が存在する。

Q.E.D.

4) 仮定の式が成り立っているとき、

$$T^{-1}\left(\sum_{\substack{i=1,\cdots,m\\ j=1,\cdots,n}} b_{ij}\varphi_{ij}\right) = \sum_{\substack{i=1,\cdots,m\\ j=1,\cdots,n}} b_{ij}E_{ij} = 0$$

いま E_{ij} は基底であるから一次独立であり、${}^{\forall}i, j,\ b_{ij} = 0$ でなければならない。

Q.E.D.

解説 問 6 の 6) の議論の根拠になる部分です。

２つの方法について、本質的に同じ方法で解いてしまいました。方法Ⅱについては、出題者の意図と異なる解答になったかもしれません。

問 8

問題 1) $V = \{$ 数列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} | a_i \in \mathbb{R}\}$ とする。$\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \in V$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{a_i\}_{i=1}^{\infty} + \{b_i\}_{i=1}^{\infty} = \{a_i + b_i\}_{i=1}^{\infty}$$

$$\lambda\{a_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\lambda a_i\}_{i=1}^{\infty}$$

で定めるとき、V は $\mathbb{R}$-線型空間となることを示せ。

2) $W = \{\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in V | a_{i+2} - 5a_{i+1} + 6a_i = 0\}$ とする。1) で定めた演算によって W は $\mathbb{R}$-線型空間となるが、このとき W は有限次元であることを示せ。また具体的な基底を一組与えよ。

3) 1) の V は $\mathbb{R}$ 上有限次元でないことを示せ。

解答 1) 省略します。[*3]

2) W が $\mathbb{R}$-線型空間であることは省略。W が有限次元であることを示す。

$$a_{i+2} - 5a_{i+1} + 6a_i = 0 \Longleftrightarrow a_{i+2} - 2a_{i+1} = 3(a_{i+1} - 2a_i)$$

$$\therefore a_{i+1} - 2a_i = 3^{i-1}(a_2 - 2a_1)$$

一方、

$$a_{i+2} - 5a_{i+1} + 6a_i = 0 \Longleftrightarrow a_{i+2} - 3i + 1 = 2(a_{i+1} - 3a_i)$$

$$\therefore a_{i+1} - 3a_i = 2^{i-1}(a_2 - 3a_1)$$

2 式を辺々引き、

$$\begin{aligned} a_1 &= 3^{i-1}(a_2 - 2a_1) - 2^{i-1}(a_2 - 3a_1) \\ &= (3^{i-1} - 2^{i-1})a_2 - (2 \cdot 3^{i-1} - 3 \cdot 2^{i-1})a_1 \end{aligned}$$

よって、たとえば $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ として $a_i = 3 \cdot 2^{i-1} - 2 \cdot 3^{i-1}$ を得、

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ として $a_i = 3^{i-1} - 2^{i-1}$ を得るが、

そこで $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} = \{3 \cdot 2^{i-1} - 2 \cdot 3^{i-1}\}_{i=1}^{\infty}$, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{3^{i-1} - 2^{i-1}\}_{i=1}^{\infty}$ とすると、$a_1 = \lambda, a_2 = \mu$ で定まる W の元は

$$\{a_i\}_{i=1}^{\infty} = \lambda\{e_i\}_{i=1}^{\infty} + \mu\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$$

なので $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}, \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は W を生成する。

また $\lambda\{e_i\}_{i=1}^{\infty} + \mu\{f_i\}_{i=1}^{\infty} = 0$ とすると、$(3\lambda - \mu)2^{i-1} + (\mu - 2\lambda)3^{i-1} = 0 \quad ({}^{\forall}i)$ なので、

$$\begin{cases} 3\lambda - \mu &= 0 \\ \mu - 2\lambda &= 0 \end{cases}$$

これを解いて $\lambda = \mu = 0$ よって、$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は一次独立。

以上から、$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ は W の基底のひとつである。

これより、$\dim W = 2$ であるから、W は有限次元である。

Q.E.D

3) $\{\underset{j}{e_i}\}_{i=1}^{\infty} \in V \quad (j \in \mathbb{N})$ を、

$$\underset{j}{e_i} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

[*3] 4/21 のセットの問 7・問 12 や 7/02 のセットの問 5 の解答を参考に、自分で解答してみてください。易しいです。

で定義する。

$\{\underset{1}{e_i}\}_{i=1}^{\infty}, \cdots, \{\underset{n}{e_i}\}_{i=1}^{\infty}, \cdots$ は明らかに一次独立であり、任意の $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in V$ に対し、

$$\{a_i\}_{i=1}^{\infty} = a_1\{\underset{1}{e_i}\}_{i=1}^{\infty} + \cdots + a_n\{\underset{n}{e_i}\}_{i=1}^{\infty} + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\{\underset{j}{e_i}\}_{i=1}^{\infty}$$

なので、これらは V を $\mathbb{R}$ 上生成する。

以上から、$\{\underset{j}{e_i}\}_{i=1}^{\infty}\ \ (j \in \mathbb{N})$ は V の基底のひとつである。

したがって、V の基底が無限個のベクトルで構成されているから、V は $\mathbb{R}$ 上有限次元ではない。

Q.E.D

別解 3) $n \in \mathbb{N}$ とする。

$$W_n = \{\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in V | a_{i+2} - (n+2)a_{i+1} + 2na_i = 0\}$$

とすると（問 2) の W について $W = W_3$ である）、問 2) と同様の計算により、$^{\forall}n, \dim n^{i-1}(a_2 - 2a_1) - 2^{i-1}(a_2 - na_1)$ であり、$^{\forall}n, \dim W_n = 2$ である。

また、$^{\forall}m, n(m \neq n), W_m \cap W_n = \{\{N \cdot 2^{i-1}\}_{i=1}^{\infty} | N \in \mathbb{N}\}$ である[*4]から、

$^{\forall}m, n(m \neq n), \dim W_m \cap W_n = 1$ である。

いま一般に、線型空間 X, Y について

$$\dim X \cap Y + \dim(X+Y) = \dim X + \dim Y$$

であるから、特に、$X = W_1, Y = W_2$ とすることにより

$$1 + \dim(W_1 + W_2) = 2 + 2 \quad \therefore \dim(W_1 + W_2) = 3$$

また、$\dim((W_1 + W_2) \cap W_3) = 1$ なので[*5]、

$$1 + \dim(W_1 + W_2 + W_3) = 3 + 2 \quad \therefore \dim(W_1 + W_2 + W_3) = 4$$

以下、帰納的に

$$\dim(\sum_{i=1}^{n} W_i) = \dim(W_1 + W_2 + \cdots + W_n) = n + 1$$

が分かる。

さて、ここで V が $\mathbb{R}$ 上有限次元であると仮定しよう。このとき、$m > \dim V$ なる $m \in \mathbb{N}$ がとれる。しかし、

$$\dim(\sum_{i=1}^{m} W_i) = m + 1$$

であるが、$\sum_{i=1}^{m} W_i \subset V$ なので、$\dim(\sum_{i=1}^{m} W_i) = m + 1 \leq \dim V$ となり、$\dim V < m$ に矛盾する。

以上から、背理法により、V は $\mathbb{R}$ 上有限次元ではない。

Q.E.D

解説 2) の計算は受験生時代が思いだされ懐かしいですね……。

3) の証明は意外とてこずるかもしれません。2) をヒントと見るなら**別解**のようになるでしょうが、どうも面倒ですから、直接無限個の基底を求めてしまいましょう。基底を見つけるために、「標準的な」基底はどのようになるか、考えてみると**解答**の基底を思いつくでしょう。

[*4] この部分は、答案ではもっとちゃんとした説明が必要でしょう。易しいので、省略します。分からなければ連絡ください。

[*5] ここも同様に、詳しく説明すべきかもしれません

04/7/13 のセット

問 1

問題 $V = \{$ 高々 3 次の t に関する $\mathbb{R}$ 係数の多項式 $\}$ とする。V の元 v_1, v_2, v_3, v_4 を

$$v_i = 1 + a_{i1}t + a_{i2}t^2 + a_{i3}t^3$$

で定めるとき、$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ が V の基底となるための a_{ij} $(1 \le i \le 4,\ 1 \le j \le 3)$ たちに関する必要十分条件を求めよ。

解答 明らかに $1,\ t,\ t^2,\ t^3$ は一次独立、かつ V を生成するから、これらは V の基底である。
これから、$\dim V = 4$ であることが分かる。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 1 & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

と定める。このとき、

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

である。いま A が正則であるとすれば

$$A^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

であるが、これは v_i たちの適当な一次結合により、V の基底を構成するベクトル全てを実現できることを意味するので、v_i たちは V を生成する。
いま v_i たちが一次従属であったとする。すると

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 = 0$$

であって、かつ ${}^\exists j,\ c_j \neq 0$ である。
すると、この j について、v_j はほかの高々 3 つの v_i の一次結合でかけることになり、その高々 3 つの v_i たちは、依然として V を生成する。
これは $\dim V < 4$ を意味するが、$\dim V = 4$ に矛盾する。よって、背理法により $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$ は一次独立である。
以上から、「v_i たちが V の基底となるための十分条件は、A が正則であること」が分かった。
次に、A が正則であることが必要条件でもあることを示す。
いま A が正則でなければ、$\operatorname{rank} A < 4$ なので、A の 4 行目を A の左基本変形のみにより全て 0 とできる。これは、

$${}^\exists c_1, c_2, c_3, c_4 \in K, c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 + c_4a_4 = 0 (c_1c_2c_3c_4 \neq 0)$$

を意味する。但し、ここでもとの A の i 行目をあらわす行ベクトルを a_i とおいた。ところでこの式は

$$(c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 + c_4a_4) \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} = 0$$

すなわち

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 = 0$$

と同値。したがって、$v_1, \cdots, v_4$ が一次独立でなくなってしまうから、これらは V の基底ではない。これで示された。

以上から、求める必要十分条件は、

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{a_{41}} & \boldsymbol{a_{42}} & \boldsymbol{a_{43}} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{GL(4; K)}$$

である。

問2

問題 A, B を以下のような 4 次行列とする。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで線型写像 $T_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ T_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を

$$\begin{aligned} T_A(v) &= Av, \\ T_B(v) &= Bv \end{aligned}$$

で定める。ただし、上の式において $v \in \mathbb{R}^4$ である。

$W_1 = \operatorname{Ker} T_A,\ W_2 = \operatorname{Ker} T_B$ とするとき、$W_1 \cap W_2$ の基底 B_0、W_1 の基底 B_1、W_2 の基底 B_2、$W_1 + W_2$ の基底 B_3 、$\mathbb{R}^4$ の基底 B_4 であって、

$$\begin{array}{ccccc} B_0 & \subset & B_1 & & \\ \cap & & \cap & & \\ B_2 & \subset & B_3 & \subset & B_4 \end{array}$$

を満たすものを一組与えよ。

解答 W_1 は、一次方程式 $Av = 0$ の解集合である。そこで A を左基本変形していくと、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{要として掃きだす}]{\text{1 列目を (1,1) 成分を}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{1/10 倍する}]{\text{2 行目を}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{要として掃きだす}]{\text{2 列目を (2,2) 成分を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるから、$Av = 0$ の解は、$\alpha_1, \alpha_2 \in K$ をパラメータとして

$$v = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{*}$$

である。これより、$\dim W_1 = 2$。

同じことを W_2 についても繰りかえす。W_2 は、一次方程式 $Bv = 0$ の解集合であり、B を左基本変形していくと、

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{要として 1 列目を掃きだす}]{\text{1 行目を-1 倍し、(1,1) 成分を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{要として掃きだす}]{\text{2 列目を (2,2) 成分を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるから、$Bv = 0$ の解は、$\beta_1, \beta_2 \in K$ をパラメータとして

$$v = \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。従って、$\dim W_2 = 2$ である。
次に $W_1 \cap W_2$ について考える。そこで、

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なる $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ を求めることにする。さて、この式は

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0$$

と同値。そこで、これを解くため、係数行列を左基本変形していくと、

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{要として 1 列目を掃きだす}]{\text{1 行目を-1 倍し、(1,1) 成分を}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{要として 2 列目を掃きだす}]{\text{2 行目を$-1/2$ 倍し、(2,2) 成分を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{-1 倍する}]{\text{3 行目を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるから、この解は、γ をパラメータとして

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である。
さて、これより、W_1 の元 v を定めたときそれが W_2 の元でもあるための条件は、v を (*) のようにかいたとき、

$$\alpha_1 = -\alpha_2$$

となることである。従って、$W_1 + W_2$ の元は

$$v = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

とかける。つまり、

$$\boldsymbol{B_0} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix} \right\}$$

とすれば、B_0 は W_1+W_2 の基底となる。

次に、B_0 を含む W_1 の基底を探す。$\dim W_1=2$ なので、B_0 の元と一次独立な W_1 の元を付け加えれば、それが W_1 の基底である。たとえば ${}^t(-1\ \ 0\ \ 1\ \ -1)-{}^t(-1\ \ -1\ \ 2\ \ 0)={}^t(0\ \ 1\ \ -1\ \ -1)$ を付け加え、

$$\boldsymbol{B_1}=\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}\right\}$$

とすればよい。

同様に、B_0 の元と一次独立な W_2 の元、たとえば ${}^t(0\ \ 0\ \ 1\ \ 0)$ を付け加え、

$$\boldsymbol{B_2}=\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}\right\}$$

とすれば、B_2 は B_0 を含む、W_2 の基底である。

さて、B_1,B_2 のいずれかに含まれる異なるベクトルは 3 つある。これらは一次独立である。また、W_1 の元と W_2 の元の和は、全てこれらの一次結合で表せるから、

$$\boldsymbol{B_3}=\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}\right\}$$

は W_1+W_2 の基底であり、明らかに B_1,B_2 を含む。

さて、いま B_3 の 3 つのベクトルで生成されない $\mathbb{R}^4$ の元を付け加えると、B_4 は $\mathbb{R}^4$ の基底となる。たとえば、${}^t(0\ \ 0\ \ 1\ \ 1)$ を付け加え、

$$\boldsymbol{B_4}=\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}\right\}$$

とすればよい。

B_0,B_1,B_2,B_3,B_4 のつくりかたから、これらは問題の条件を満たすものになっている。

解説 小さい集合に一段階ずつ元を付け加えていく方法がもっとも楽だと思います。上の**解答**は、もう少し一次独立であることの説明とかがあったほうがいい気がするのですが、そこらへんは各自補ってください。

問3

問題 $V = \{$ 高々 3 次の t に関する $\mathbb{R}$ 係数の多項式 $\}$ とし、$E = \{1, t, t^2, t^3\}$ を V の標準的な基底とする。

$$F = \{t^3, t^3 + t^2, t^3 + t^2 + t, t^3 + t^2 + t + 1\},$$
$$G = \{(t+1)^3, (t+1)^2, t+1, t\}$$

とするとき、F, G はともに V の基底であることを示せ。また、E から F、E から G、F から G に対応する基底の変換行列をそれぞれ求めよ。

解答

$$f_1 = t^3,\ f_2 = t^3 + t^2,\ f_3 = t^3 + t^2 + t,\ f_4 = t^3 + t^2 + t + 1$$

$$g_1 = (t+1)^3,\ g_2 = (t+1)^2,\ g_3 = t+1,\ g_4 = t$$

とする。$F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}, G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ である。

- F が V の基底であること

  まず、明らかに分かるように、

  $$t^3 = f_1,\ t^2 = f_2 - f_1,\ t = f_3 - f_2,\ 1 = f_4 - f_3$$

  である。つまり F の元の一次結合で標準基底 E を構成するベクトル全てを実現できるから、F は V を生成する。

  また、$a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3 + a_4f_4 = 0,\ a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ のとき、
  両辺の 0 次の項に注目すると $a_4 = 0$ である。
  また、両辺の 1 次の項に注目すると $a_3 + a_4 = 0$ であるが $a_4 = 0$ より $a_3 = 0$
  同様に、2 次、3 次の項に順に注目して、それぞれ $a_2 = 0, a_1 = 0$ を得る。したがって、F は一次独立である。
  以上から、F は V を生成し、一次独立なので F は V の基底である。

- G が V の基底であること

  $a_1g_1 + a_2g_2 + a_3g_3 + a_4g_4 = t^3$ が恒等式となるよう係数 $a_i (i = 1, 2, 3, 4)$ を定めると、$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, -3, 2, 1)$ となるから、

  $$g_1 - 3g_2 + 2g_3 + g_4 = t^3$$

  となる。同様な方法を用いることにより、

  $$g_2 - g_3 - g_4 = t^2,\ g_4 = t,\ g_3 - g_4 = 1$$

  も分かる。よって、G の元の一次結合で標準基底 E を構成するベクトル全てを実現できるから、G は V を生成する。

  また、$a_1g_1 + a_2g_2 + a_3g_3 + a_4g_4 = 0,\ a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ のとき、
  両辺の 3 次の項に注目すると $a_1 = 0$ である。
  同様に、2 次、1 次、0 次の項に順に注目して、それぞれ $a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0$ を得る。したがって、G は一次独立である。
  以上から、G は V を生成し、一次独立なので G は V の基底である。

- 変換行列を求める

  $X, Y = E, F, G$ として、X から Y への変換行列を P_{XY} とかく。

  F, G の定め方から、

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  なので、

$$P_{EF} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{EG} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  これより、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix} P_{EG} \\ &= \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{pmatrix} P_{EF}^{-1} P_{EG} \end{aligned}$$

  である。そこで、P_{EF}^{-1} を求めると、

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[\text{3 行目を各々入れ替える}]{\text{1 行目と 4 行目、2 行目と}} &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[\text{3 行目から 4 行目を各々引く}]{\text{1 行目から 2 行目を、2 行目から 3 行目を、}} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  より、$P_{EF}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。したがって、

$$\begin{aligned} P_{FG} &= P_{EF}^{-1} P_{EG} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  となり、これで全ての変換行列が求まった。

解説　一般に X, Y, Z がいずれも V の基底のとき、

$$(X \text{ から } Z \text{ への変換行列}) = (X \text{ から } Y \text{ への変換行列}) \times (Y \text{ から } Z \text{ への変換行列})$$

です（すぐ確かめられるでしょう）。

問 4

問題 K^n の元 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に関する一次方程式系

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = c_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = c_m \end{cases} \tag{*}$$

を考え、解空間を V とする。$V \subset K^n$ である。

1) $V \neq \emptyset$ とする。このとき V が線型空間であることと、$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ は同値であることを示せ。

2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ とおき、$f : K^n \to K^m$ を

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

で定める。このとき、$v = f^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}\right\}\right)$ であることを示せ。

3) $V \neq \emptyset$ と $f(K^n) \cap \left\{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}\right\} \neq \emptyset$ は同値であることを示せ。

・ 以下では $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ とする。したがって $V \neq \emptyset$ であって、V は線型空間である。

4) (*) にさらに $b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0$ という条件を付け加えた一次方程式系を考え、その解空間を W とおく。このとき、W は V の線型部分空間であることを示せ。

5) 4) において、$\dim V = \dim W$ であることと

$$^\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V,\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0$$

が成り立つことは同値であることを示せ。

・ 5) が成り立つような $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ の組を行ベクトルとみなし、このような行ベクトル全体の集合を U で表す。K^n を行ベクトル全体のなす線型空間とみなせば $U \subset K^n$ である。

6) 上のように $U \subset K^n$ とみなしたとき、U は K^n の K-線型部分空間であることを示せ。

7) 行ベクトル $e_1, e_2, \cdots, e_m$ を $e_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \in K^n$ で定める。このとき U は $e_1, e_2, \cdots, e_m$ で生成されることを以下のように示せ。

7-1) $e_1, e_2, \cdots, e_m$ で生成される K^n の部分空間を U' とおくと $U' \subset U$ であることを示せ。

7-2) $U \supsetneq U'$ であったとして、$u \in U \setminus U'$ とする。つまり $u \in U$ であって $u \notin U'$ であるとする。A の下に更に u を並べた行列を $A' = \begin{pmatrix} A \\ \hline u \end{pmatrix}$ とおくと、$\operatorname{rank} A' = \operatorname{rank} A + 1$ であることを示せ。

7-3) 引き続き $U \supsetneq U'$ であるとする。このとき、$\dim\{v \in K^n | Av = 0\} = n - \operatorname{rank} A$ である（これは認めてよい）が、一方 $\{v \in K^n | Av = 0\} = \{v \in K^n | A'v = 0\}$ であることを示し、矛盾を導け（括弧の中の K^n はいつもどおり列ベクトルの全体とみなしている）。

8) 7) の結果を用いて $\dim U = \operatorname{rank} A$ を示せ。

解答 1) • V が線型空間ならば $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ であること

かりにある k について $c_k \neq 0$ だったとすると、$v = (v_i), w = (w_i) \in V$ について、

$$a_{k1}(v_1 + w_1) + a_{k2}(v_2 + w_2) + \cdots + a_{kn}(v_n + w_n) = 2c_k \neq c_k$$

であるから、$v + w \notin V$ であり、V は線型空間とならない。これで対偶が示せたことになる。

• $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ ならば V が線型空間であること

ここでは省略します[*6]

Q.E.D

2) $f^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}\right\}\right)$ は、$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ を満たすような $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 全体の集合を意味する。

f の定め方から、これは方程式

$$Ax = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

の解の集合、すなわち (*) の解空間に他ならない。

Q.E.D

3)

$$\begin{aligned} f(K^n) \cap \left\{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}\right\} \neq \emptyset &\iff {}^{\exists}v \in K^n,\ f(v) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \\ &\iff (*) \text{ が解 } v \in K^n \text{を持つ} \\ &\iff {}^{\exists}v \in K^n,\ v \in V \\ &\iff V \neq \emptyset \end{aligned}$$

Q.E.D

・ 以後、(*) に条件 $b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0$ を加えた一次方程式系を (+) とかく。

4) • $W \subset V$ なること

$w \in W$ を考えると、w は (+) の解だから、(*) の解でもある。よって $w \in V$

したがって

$${}^{\forall}w \in W, w \in V$$

なので、$W \subset V$ である。

[*6] 4/21 のセットの問 7 や問 12 の解答を参考に、自分で解答してみてください。易しいです。

- W が線型空間であること
  これも省略します。[*7]

Q.E.D

5)

$$^{\forall}x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V,\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0$$

$\iff$ $(*)$ の解は全て $(+)$ の解でもある
$\iff V \subset W$
$\iff V = W \quad (\because V \supset W$ でもあるから$)$
$\iff \dim V = \dim W$

Q.E.D

6)
- 和とスカラー倍について閉じていること
  $b = (b_i), b' = (b'_i) \in U, c \in K$ について、

$$(b_1 + b'_1)x_1 + (b_2 + b'_2)x_2 + \cdots + (b_n + b'_n)x_n = 0$$
$$(cb_1)x_1 + (cb_2)x_2 + \cdots + (cb_n)x_n = 0$$

  より、$b + b' \in U,\ cb \in U$
- この和とスカラー倍について線型であること
  これも省略します。

Q.E.D

7) 7-1) U' の任意の元 u は、$u = c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n\ (c_i \in K)$ と表される。
このとき、u の第 j 成分を u_j で表すと、

$$u_j = c_1a_{1j} + c_2a_{2j} + \cdots + c_ma_{mj}$$

であるが、

$$\begin{aligned} &u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n \\ &= c_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + c_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n) \\ &= c_1 \cdot 0 + \cdots + c_m \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから、$u \in U$ である。これで

$$^{\forall}u \in U',\ u \in U$$

が示された。よって、$U' \subset U$ である。

Q.E.D

7-2)

$$A' = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \\ u \end{pmatrix}$$

である。いま、A' に「行の入れ替え」を除く左基本変形だけで、$m+1$ 行目をすべて 0 にできると仮定しよう。$m+1$ 行目を 0 にするには、原理的には、$m+1$ 行目にほかの行の定数倍を加える操作と、$m+1$ 行目の定数倍だけで十分である。ところが、これはある $c_i \in K\ (i = 1, \cdots, m), c \in K$ により

$$cu + c_1e_1 + \cdots + c_me_m = 0$$

[*7] 1) と同様、易しいので各自解答を書いてください。

と表せることを意味し、$u \notin U'$ すなわち、u が $e_1, \cdots, e_m$ で生成されないことに矛盾する。いま、A をどう左基本変形しても、「全て 0」でない行の行数は $\operatorname{rank} A$ を下回らないし、うまく左基本変形してこの行数を $\operatorname{rank} A$ にできる。すると、A' をどう左基本変形しても、（もともと u のあった行は全て 0 にできず、同様にほかの行も、u が加わったことで新たに 0 にできる行はないから（あったとすればその行をあらわす行ベクトルが $u, e_1, \cdots, e_m$ の一次結合で表せることになり、やはり 7-1) に矛盾))、「全て 0」でない行の行数は $\operatorname{rank} A + 1$ を下回らないことになり、また、A の「全て 0」でない行を $\operatorname{rank} A$ 行にしたのと同様な左基本変形を A' に施すことにより A' の「全て 0」でない行を $\operatorname{rank} A + 1$ 行にできる。
これは $\operatorname{rank} A' = \operatorname{rank} A + 1$ を意味する。

Q.E.D

7-3) $u \in U$ なので、

$$^\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V,\ u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots u_nx_n = 0$$

が成り立つ。よって 5) より、$\dim V = \dim W$ すなわち $V = W$ である。V, W はそれぞれ (*), (+) の解集合であるから、$V = W$ は結局示すべき等式

$$\{v \in K^n | Av = 0\} = \{v \in K^n | A'v = 0\}$$

と同値である。
さて、ここで

$$\dim\{v \in K^n | Av = 0\} = n - \operatorname{rank} A$$

であり、同様に

$$\dim\{v \in K^n | A'v = 0\} = n - \operatorname{rank} A' = n - \operatorname{rank} A - 1 \quad (\because \text{7-2}))$$

である。よって、互いに等しいはずの 2 つの線型空間 $\{v \in K^n | Av = 0\}$, $\{v \in K^n | A'v = 0\}$ の次元が互いに異なることになり、これは矛盾である。

Q.E.D

8) ある i について、i 行目が A の左基本変形により全て 0 に成ったとすると、7-2) の議論と同様、e_i がほかの e_j たちの一次結合で表せる。そこで $e_1, \cdots, e_{i-1}, e_{i+1}, \cdots, e_m$ を考える。ほかの i' について、i' 行目がすべて 0 にできるなら、同じことを繰り返す。これを有限回（0 回も含む）繰り返すと、互いに一次独立な r 個の行ベクトルを得る。この r 行は、定め方から、どんな基本変形でも「全て 0」にはできないので、$r = \operatorname{rank} A$ である。一方、この残った r 個の行ベクトルは一次独立で、U を生成するので U の基底のひとつとなっている。よって、$r = \dim U$。
以上から、$\dim U = \operatorname{rank} A$ である。

Q.E.D

解説 長い問題でした。結局この問題全体で示したことは、実は直観的には明らかなことです（n 本のベクトルがあったとき、$\operatorname{rank} A$ はそのうち最大いくつのベクトルで一次独立な組を作れるか、$\dim U$ はそれらと一次従属なベクトルを作るのに、最大いくつ一次独立なベクトルを使えるか）。証明も、各ステップを丁寧に検討すれば、本質的にはそう難しくはありません。但し、7-2) や 8) あたりは日本語の表現に少し苦労します（もっといい書き方があれば教えてください）。