

数 計算問題概略

M i y a - N*

概要

単位が危ない人、計算問題に手も足も出ない人（ちなみに前者 \supset 後者）のための救済シケプリ。数学の試験範囲に含まれている計算問題を一通りまとめてあります（基底・次元の話題を除く）。それぞれの計算方法が妥当であることの数学的保障などはここでは一切省いていますので、そちらは講義ノートを各自参照してください（そちらの勉強も大切です）。

なお、計算問題をマスターすることは単位取得のための必要条件ですが十分条件ではありません。

目次

1	基本変形	2
2	掃きだし法	3
3	階数	4
4	逆行列	5
5	連立一次方程式の解	6
6	置換	7
7	行列式	8

* 「みやーん」と読みます。2004年度入学理科I類5組

1 基本変形

これを知らないと何もできません。

中身は単純で、行列に対して

1. 列（または行）をまとめて何倍かする（0倍は不可）
2. ある列（または行）とほかの列（または行）を入れ替える
3. ある列（または行）にほかの列（または行）の何倍かを足す

ことを（連続技も可）基本変形といっているだけです。

たとえば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1列目に加える}]{\text{2列目の-2倍を}} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ -6 & 5 & 6 \\ -9 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{3行目を2倍する}]{\text{1行目と2行目を入れ替え}} \begin{pmatrix} -6 & 5 & 6 \\ -3 & 2 & 3 \\ -18 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

という一連の変形は基本変形です。なお、列についての基本変形を「左基本変形」、行についての基本変形を「右基本変形」といいます。

気づかれたでしょうか、「列」がタテの並び、「行」がヨコの並びです。普通の日本語と逆^{*1}なので気をつけましょう。

試験で基本変形の過程を書くときは、その過程を暗算で追える程度の詳しさで書くべきです。

次の章は「掃きだし法」です。これはのちのち効率のよい基本変形をするための重要な布石となります。

*1 数学には関係ない話ですが……。僕は小・中学校のころ「ぶよぶよ」というゲームにもものすごくはまっていました。ほとんどマニアでした（強くはないんだけどね。「ぶよぶよ」に、というより、それを製作している「コンパイル」という会社のゲームに熱狂していました。そういえば地元の公式ぶよ大会に出たりもしたなあ。）

まあそれはともかく、「ぶよぶよ」のフィールドの升目の正式な数え方はヨコが「段」、タテが「行」なんです。これは結構感覚的に分かりやすい名づけ方だと思いませんか？ただ「段」というと1つ1つ積み重なってるような感じがしてしまって、全ての「段」がある意味平等であるという行列の感覚とあわないのかもしれないかもしれません。そもそも数学ではなんで行・列をこんな風に使うんでしょうかね？

……。以上、徒然なるままに綴った、超どうでもいい話でした。

2 掃きだし法

「掃きだし法」は、一言で言うと「基本変形によってある行(または列)を、ひとつの1だけ残してあとは全部0にする方法」です。たとえば、次の例を見てください。

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{倍する}]{1 \text{行目を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2} \text{行目に加える}]{1 \text{行目の}-4 \text{倍を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 14 \end{pmatrix}$$

1列目に着目すると、(1,1)成分だけ1であとは全部(といってもあと1つしかないけど)0になっていますね。

もう一例。

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{-1} \text{倍する}]{2 \text{行目を}} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{1} \text{行目に加える}]{2 \text{行目の}-3 \text{倍を}} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3} \text{行目に加える}]{2 \text{行目の}-4 \text{倍を}} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

これも、1列目に注目すると、(2,1)成分が1である以外は全部0です。この操作を、「(2,1)成分を要として1列目を掃きだす」といいます。はじめの例では、「(1,1)成分を要として1列目を掃きだした」わけですね。

実際に自分でやってみると、要領が分かると思います。要は、(i,j)成分を要としてj列目を掃きだすには、i列目を(i,j)成分の値で割って、次にk(k=1,⋯,i-1,i+1,⋯)行目に、それぞれi行目の-(k,j)成分)倍を足せばいいわけです。というか絶対自分でやらないとわからないので、演習してください。

ちなみに、試験では掃きだし法の部分は一気に書いていいようです。つまり

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{要として掃きだす}]{1 \text{列目を、}(2,1) \text{を}} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

のように書いてしまってOKです。

では、次の章からは、基本変形(掃きだし法)を使っているいろいろなものを求めることを考えます。

3 階数

基本変形を使って行列の「階数」というものを求めてみます。「階数」は英語に直すと rank です。行列 A の階数を、 $\text{rank}A$ とか $\text{rk}A$ とか書きます。また、基本変形における「行・列の定数倍」などで、「定数」としてどの範囲の数まで認めるか、というのをはっきりさせたいときは $\text{rank}_{\mathbb{R}}A$ （この場合「定数」は実数のみ）と書いたりします。何も書いてなかったら、成分をみて判断してください。^{*2}

では、階数の求め方。これは一般的に説明するより例をいくつか挙げるほうが早いでしょう。規則を見つけてみてください。

1.

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1行目の-1倍を加える}]{\text{1行目を1/2倍し、2行目に}} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1列目の-3倍を加える}]{\text{1列目を1/2倍し、2列目に}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

基本変形の仕方によって階数は変わらないことから、 $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の階数は 1

2.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{要として掃きだす}]{\text{1列目を、(2,1)を}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{要として掃きだす}]{\text{2列目を、(1,2)を}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{入れ替える}]{\text{1,2列目を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

基本変形の仕方によって階数は変わらないことから、 $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数は 2

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{要として掃きだす}]{\text{1列目,1行目を、(1,1)を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{要として掃きだす}]{\text{2列目,2行目を、(2,2)を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

基本変形の仕方によって階数は変わらないことから、 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ の階数は 3

大体分かりましたか？階数を求めたい行列を基本変形して行って、「1 が左上から斜めに r 個続いていて、ほかの成分は全部 0 である行列」となったら、その階数は r だ、ということです。ここで、「でも、ほかのやり方で基本変形をしていったら r の値が変わるかもしれないじゃん」と思われるかもしれませんが、実はどう基本変形しても変わりません。これが、「基本変形の仕方によって階数は変わらないことから」の意味です。

ところで、基本変形の目標となる行列はやけに 0 が多いですね。そして、基本変形によって 0 を増やす効率のよい手段として、「掃きだし法」がありました。というわけで、階数を求める過程で掃きだし法は非常によく使われます。

次章では、正方行列に対して逆行列を求める方法を示します。

^{*2} 実は、 $\text{rank}_{\mathbb{R}}A = \text{rk}_{\mathbb{C}}A$ なので、あまり気にする必要はありません。

4 逆行列

基本変形を使って、平方行列の逆行列を求めることができます。

ここでは $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めることを考えます。まず、この行列の右に単位行列を書き足します。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります。次に、この行列に左基本変形のみを施して左半分を単位行列にします（左基本変形とは、行に関する基本変形でした）。すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-3倍を加える}]{\text{[2]に[3]の}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-2倍を加える}]{\text{[1]に[2]の}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります。この結果の行列の右半分を見て、逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となります。これをみれば、一般の場合どう求めればよいかも分かったでしょう。逆行列が求まったら、元の行列との積がちゃんと単位行列になるか確かめること。

なお、上の基本変形で、スペースの都合上「2行目」を[2]のように書いてしまいました。これはちゃんと書き方ではないので注意してください。

さて、この場合左半分がちゃんと単位行列になったのでよかったです、もし

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のようになったらどうするのか？この場合は、元の行列は逆行列を持ちません。さらに、その行列の階数が2であることもわかります。実は、「階数」の章では基本変形に右基本変形も左基本変形も使ってよいとしていましたが、これらのうちどちらかだけでもちゃんと単位行列にたどり着けるためです。このことから、「逆行列を持つならそれを求めよ」などと言われても、はじめから上のように変形していけばよいことが分かります。

逆行列については以上です。次の章では連立一次方程式の解法を扱います。ここでも基本変形が活躍することになります。

5 連立一次方程式の解

今回の試験範囲における、計算問題の大きな難関のうちのひとつです。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = c_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = c_n \end{cases}$$

という連立一次方程式は、 $A = (a_{ij})$, $x = {}^t(x_1 \cdots x_n)$, $c = {}^t(c_1 \cdots c_n)$ として、 $Ax=c$ と同値です。これを解くことを考えればいいわけですね。

$c = 0$ という特別な場合を除き、 \tilde{A} , \tilde{x} という行列を考えます。 \tilde{A} は A の横に c をくっつけた行列 ($\tilde{A} = (A : c)$)、 \tilde{x} は x の下に -1 をくっつけた行列です。こうすると、 $\tilde{A}\tilde{x} = Ax - c$ なので、上の方程式はさらに

$$\tilde{A}\tilde{x} = 0$$

と同値になり、さらに解きやすくなったわけです。

さて、ここからは好みで 2 通りの解き方がありますが、ここでは講義の本編で扱われたほうのみを紹介します。もう一方の解きかた^{*3}も、試験直前に「補足」として扱われていました。これが知りたい方は教科書を参照するなどしてください。

では、説明します。まず、 \tilde{A} に左基本変形と列の入れ替えのみを施して次のような形にします。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1,n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2,n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{r,n} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_m \end{pmatrix}$$

ここで場合分けが生じます。

$d_{r+1} = \cdots = d_m = 0$ でなければ、元の方程式は解を持ちません。

$d_{r+1} = \cdots = d_m = 0$ ならば、解を持ちます。

さて、 \tilde{A} を基本変形したとき、列の入れ替えを許しました。その列の入れ替えは、実は変数の順序の入れ替えに対応しています。というわけで、その変数の順序を戻してやらなければいけません。たとえば、基本変形において列の入れ替えが「1,3 列の入れ替え 2,4 列の入れ替え 5,6 列の入れ替え」という順序で出てきたなら、

$${}^t(x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6) \rightarrow {}^t(x_3 \ x_2 \ x_1 \ x_4 \ x_5 \ x_6) \rightarrow {}^t(x_3 \ x_4 \ x_1 \ x_2 \ x_5 \ x_6) \rightarrow {}^t(x_3 \ x_4 \ x_1 \ x_2 \ x_6 \ x_5)$$

という入れ替えをしているわけですから、解の成分もこのように入れ替えられています。

一般に、 x にこのように適切な成分を施したものを $y = (y_i) (i = 1, \dots, n)$ とすると、解は

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ y_{r+2} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_{r+1} \begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_{r+2} \begin{pmatrix} -b_{1,r+2} \\ \vdots \\ -b_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{pmatrix} -b_{1,n} \\ \vdots \\ -b_{r,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

となります (α_i は任意定数)。これを読んでいただけでは何がなんだか分からないでしょうから、これについても演習してください。

^{*3} 僕はこっちのほうが好きです。どうでもいいけど.....

6 置換

この章は行列式の定義のための布石ですが、行列式の計算の上では定義は役に立ちません。すなわち、この置換の知識も不要です。いずれにしても論理面では絶対必要なのですが、とりあえず行列式が求められればいい人はひとまず飛ばして読んでもよいかもしれません（でもちゃんと置換も勉強しましょう）。

まず置換とは何かですが、これは簡単で、要するに「 n 個のものの並べ替え」です。これを、次のように、行列チックに表します。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

これは、番号 1 のものを番号 3 に、番号 2 のものを番号 1 に、番号 3 のものを番号 2 に並べ替える置換を σ と書こう、ということです。置換を表す行列（チックなもの）は、列同士を入れ替えても全く同じ意味になりますね？たとえば上の σ と、 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ は全く同じ置換です。

さて、たとえば置換 σ はさっきのと同じにして、 $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ とします。置換 σ と τ を連続して行った置換を $\tau \circ \sigma$ と書きます（置換の合成、または積と呼びます）。

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ですね。

次に、互換について。たとえば置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 3 & 2 & 1 & 4 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

のように、1 と 3 だけ入れ替えてほかを変えないような置換を互換といいます。そしてこの互換を簡単に $(1\ 3)$ と表します。一般に i と j を入れ替える互換は $(i\ j)$ です。

さて、任意の置換はいくつかの互換の積に分解できます。言葉を変えると、どんな入れ替えでも、2 つづつ入れ替えることを何回か繰り返せば同じ効果が得られます。しかも、その互換の個数の偶奇は置換によって一意に定まります。たとえば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 4) \circ (2\ 3) = (1\ 2) \circ (2\ 3) \circ (3\ 4) \circ (1\ 2) \circ (1\ 3) \circ (2\ 3)$$

などいろいろ互換の積への分解の仕方がありますが、いずれにしてもその数は偶数です。このような置換を「偶置換」といいます。一方、どう分解しても互換の奇数個の積となるような置換は「奇置換」です。

最後に、符号の話をしてします。定義式を書いてしまうと、 n 文字についての置換（これを n 次の置換という） σ に対して、

$$\text{sgn}\sigma = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

を σ の符号といいます。実は σ が偶置換のとき符号は 1、奇置換のとき -1 です。

では、次の章で、正方行列の行列式を求める方法をいくつか挙げます。

7 行列式

いよいよ(?) 行列式を求めます。求め方がいくつかあるので紹介します。

一瞬で分かるパターン

行列式を求めたい行列をみて、次のパターンに当てはまっているか確認します。

- すべての成分が 0 であるような行(または列)がある。
- 全く同じ行(または列)がある。
- 基本変形によって上の 2 つのような行列になる

このような行列の行列式は必ず 0 です。

2 次の行列

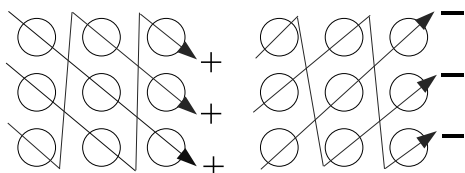
東大生に改めて言うのもなんだかど・・・

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

です。

3 次の行列

サラスの方法と呼ばれる簡単な求め方があります。



左の図を見てください。3 次の正方行列の行列式を求めるには、 \rightarrow が通る 3 つの成分を掛け合わせます。の行き先が + ならその積を足し、- ならその積を引く。これで OK です。

余因子展開

高い次数の正方行列の行列式を求めたいとき、余因子展開という方法で次数を下げるすることができます。

たとえば、

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

の行列式を求めたいとします。この場合は 3 次だからサラスの方法で一発ですが、ここでは 2 次の行列式に帰着させることを考えましょう。「余因子展開」という操作を 1 列目に施して、

$$|M| = 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

が成り立ちます。どういう規則がわかりますか? ちょっと考えてみてください。

ヒントとしてもう一例。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} + 9 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} - 13 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}$$

「成分 \times (その成分を含む行・列を除いた行列の行列式)」を 1 列目の成分全部について足したり引いたりしているわけですね。これを「1 列目について余因子展開する」といいます。ほかに、任意の行・列について余因子展開できます。足すか、引くかは、

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

と、+ と - を市松模様のように並べて、注目している成分が + か - かで判断します。

基本変形の利用

基本変形を用いて、行列を簡単な形にできます。

1. ある行 (または列) を定数 c 倍すると、行列式も c 倍され、
2. 2 つの行 (または列) を入れ替えると、行列式の符号が入れ替わり (つまり -1 倍され)
3. ある行 (または列) にほかの行 (または列) の定数倍を加えても行列式は変わりません。

定義に則って計算

定義を最後に載せるのは数学として間違ってますが.....。まあ「理論面は抜き」ということで許してください。

さて、 n 次の置換は ${}_n P_n = n!$ 通りありますが、その置換すべてについての和

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\text{sgn} \sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

をとります (なお行列式を求めたい行列の (i, j) 成分を a_{ij} としています)。この値が行列式です。

実際に行列式を求める際、この定義式のお世話になることはたぶんないでしょう。定義に則って計算しているヒマがあったらほかの問題を解きましょう。

実践

実際に行列式を求めるときどうするのが楽か。複雑そうな行列ならば、たいてい基本変形 (掃きだし法) と余因子展開のコンビネーションになるでしょう (一概には言えませんが)。

ひとつ例を示しておきます。

$$M = \begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 & -3 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \\ 8 & -4 & 3 & 7 \\ -16 & 7 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

の行列式を求めたいとします。次のようにできます。

$$\begin{vmatrix} -9 & 4 & -3 & -3 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \\ 8 & -4 & 3 & 7 \\ -16 & 7 & -5 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{[2] \text{ の } 3 \text{ 倍を } [1] \text{ に、} -3 \text{ 倍を} \\ [3] \text{ に、} 5 \text{ 倍を } [4] \text{ に加える}}} \begin{vmatrix} 6 & -2 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \\ -7 & 2 & 0 & 2 \\ 9 & -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{3 \text{ 列目について} \\ \text{余因子展開}}} -1 \times \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -7 & 2 & 2 \\ 9 & -3 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{3 \text{ 行目を} \\ 1/3 \text{ 倍する}}} -3 \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -7 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{サラスの方法を} \\ \text{用いる}}} -3(6 \cdot 2 \cdot 2 + (-7) \cdot (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-2) \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 3 - (-7) \cdot (-2) \cdot 2 - 6 \cdot (-1) \cdot 2) = 3$$

$[i]$ は i 行目の意味で書きましたが、正式なものではありません。