数学II演習　解答・解説集

Ｍｉｙａ－N*

2004 年度冬学期 数学 II 演習（足助太郎教官）に使われた演習問題の解答です。(特に断らない限り) 試験にそのまま使える程度の詳しさで書いたつもりですが、足りないと思うところは各自補ってください。

目次

問題データ一覧

	問 1 問 5	問 2 問 6	問 3 問 7	問 4 問 8
第 8 回	prf prf ⊃	prf [2) ⊃] prf ⊃✓	prf —	cal ▾[3),4) ⊃] —
第 9 回	prf [1) ✓] prf	cal ⊃ —	cal ⊃ —	cal ⊃ —
第 10 回	prf [1)-3) cal] [4),5) prf] [1),4) ✓]	prf ⊃ prf ▾	prf [1),2) ✓] [3) ⊃] —	cal [1) ✓] [1),2),4) ⊃] —
第 11 回	cal [1)-3) ✓] [1),2),4),5) ⊃] cal	cal ⊃ cal ▾	[1) prf] [2) cal] ⊃▾ —	cal ▾ —
第 12 回	cal ⊃ prf	prf cal	prf ▾ [1) cal][2) prf]	prf —
第 13 回	cal ⊃	[1),4),5) prf] [2),3),6)-10) cal] ⊃	—	—
第 14 回	[1),2) prf] [3)cal]	cal ⊃	prf ▾	[3) cal] [他 prf]

※　問題データは変動することがあります。

※　第 10 回の問 7 ～問 10 は、夏学期の追試の問題なので省略します。

※　第 13 回は、京大での定期試験です。レベル的には同レベルの試験になるそうです。

凡例

cal	計算問題	✓	黒板で発表済みの問題
prf	その他（主に証明問題）	▾	解答をまだ掲載していない問題
		⊃	易しい、または単位のためには必須の問題

* 「みやーん」と読みます。2004 年度入学理科 I 類 5 組

第 8 回（04/10/08）

問 1

2 つの n 次正方行列 $A,\ B$ が $A+B=I_n, \operatorname{rank} A+\operatorname{rank} B=n$ を満たすとき以下を示せ。

1) $\operatorname{Ker} T_A=\operatorname{Im} T_B$
2) $AB=BA=O, A^2=A, B^2=B$

1) 第 6 回（04/7/2）問 2 の結果を使い、次元に注目します。

解答

$a \in \operatorname{Ker} T_A$ とすると、$T_A(a)=0$ であり、

$$T_B(a)=(I_n-T_A)(a)=a-0=a$$

従って $a \in \operatorname{Ker} T_A \Longrightarrow a \in \operatorname{Im} T_B$ なので、$\operatorname{Ker} T_A \subset \operatorname{Im} T_B$ である。
いま $\dim \operatorname{Ker} T_A=\dim \operatorname{Im} T_B(=n-\operatorname{rank} A)$ であるから、$\operatorname{Ker} T_A=\operatorname{Im} T_B$
(証明終)

2) 前半は 1) で導いた等式の意味をよく考えてください。後半は易しい。

解答

1) から、任意の $a \in \mathbb{R}^n$ に対し $B(a) \in \operatorname{Im} T_B=\operatorname{Ker} T_A$ なので

$$T_A T_B(a)=T_A(T_B(a))=0$$

従って $AB=O$ である。

$$T_A^2=T_A(I_n-T_B)=T_A-T_A T_B=T_A$$

であるから $T_A^2=T_A$ となり、$A^2=A$。
A と B は対称だから、$BA=O, B^2=B$ も成り立つ。
(証明終)

問 2

n 次実正方行列 A が $A^2 = I_n$ を満たすとする。このとき

$$V_1 = \operatorname{Im} T_{A+I_n}$$
$$V_2 = \operatorname{Im} T_{A-I_n}$$

と定め、$s = \dim V_1,\ t = \dim V_2$ とおく。

1) $s + t = n$ であることを示せ。
ヒント：$V_1 \cap V_2$ と $V_1 + V_2$ がそれぞれどのような空間になるか考えてみよ。
2) $\{e_1, \cdots, e_s\}$ を V_1 の基底、$\{f_1, \cdots, f_t\}$ を V_2 の基底とする。
このとき $\{e_1, \cdots, e_s, f_1, \cdots, f_t\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底であることを示せ。
3) $T = (e_1, \cdots, e_s, f_1, \cdots, f_t)$ とすると T は正則行列であって、

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & -I_t \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ。

1) ヒントに従えば何とかなるでしょう。$A^2 = I_n$ の条件をどう活かすか考えると、式変形の仕方が見えます。

解答

$v \in V_1 \cap V_2$ とすると、${}^{\exists}v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n,\ T_{A+I_n}(v_1) = T_{A-I_n}(v_2) = v$ であるから、

$$(A + I_n)(v_1) = (A - I_n)(v_2)$$

両辺に左から A をかけて整理すると

$$(A + I_n)(v_1) = -(A - I_n)(v_2)$$

この 2 式を比較することにより、両辺は 0 にならざるを得ない。すなわち $V_1 \cap V_2 = \{0\}$
また、任意の $w \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\{(A + I_n) - (A - I_n)\}(a) \\ &= (A + I_n)(\tfrac{a}{2}) + (A - I_n)(-\tfrac{a}{2}) \end{aligned}$$

であるから、$\mathbb{R}^n = V_1 + V_2$
以上から、$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$ なので、$n = s + t$ である。
（証明終）

2) これは 1) の解答の最後の 1 行からほぼ明らか。解けなかった人は基底の定義をよく復習してください。

解答

1) の議論より、$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$ なので、$a \in \mathbb{R}^n$ に対し $a = v_1 + v_2$ $(v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2)$ と表す方法は 1 通りしかない。一方 $v_1 = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_s e_s,\ v_2 = \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_t f_t$ と表す方法も唯一なので、

$$a = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_s e_s + \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_t f_t$$

と表す方法は一通りである。すなわち、$\{e_1, \cdots, e_s, f_1, \cdots, f_t\}$ は $\mathbb{R}^n$ を生成するし、また一次独立でもある。
以上から、$\{e_1, \cdots, e_s, f_1, \cdots, f_t\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である。
（証明終）

3) 前半は明らかですが、後半の証明が難しいです（僕はなかなか解けませんでした）。
$T^{-1}AT$ をそのまま計算しようとするのは無謀です。T の意味を考えると次のような解法が比較的自然に現れると思います。といっても気づきにくいことには変わりありません。十分条件を追っていくと、少しはマシになると思います。

解答 2) より T の n 列は一次独立である。仮に T が正則でなければ、T に列基本変形を施してある列の成分を全て 0 にできることになり矛盾が生じるから、T は正則行列である。

いま、仮に

$$Ae_i = e_i,\ Af_j = -f_j \quad (i = 1, \cdots, s,\ j = 1, \cdots, t) \tag{*}$$

が示されたとしよう。標準基底を $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$ とし、$\mathcal{E} = \{e_1, \cdots, e_s, f_1, \cdots, f_t\}$ とすると、T は基底 $\mathcal{B}$ から基底 $\mathcal{E}$ への変換行列であって、

$$\begin{cases} T^{-1}ATb_i = T^{-1}Ae_i = T^{-1}e_i = b_i & (i = 1, \cdots, s) \\ T^{-1}ATb_{s+j} = T^{-1}Af_j = -T^{-1}f_j = -b_{s+j} & (j = 1, \cdots, t) \end{cases}$$

であるから、主張が示される。そこで (*) を示す。

いま $e_i \in \mathrm{Im}\, T_{A+I_n}$ なので

$$^{\exists}x_i \in \mathbb{R}^n,\ (A + I_n)x_i = e_i$$

いま両辺に左から A をかけて整理すると

$$(A + I_n)x_i = Ae_i$$

この 2 式を比較して

$$e_i = Ae_i$$

が得られる。
また、$f_j \in \mathrm{Im}\, T_{A-I_n}$ なので

$$^{\exists}y_j \in \mathbb{R}^n,\ (A - I_n)y_j = f_j$$

両辺に左から A をかけて整理すると

$$-(A - I_n)y_j = Af_j$$

この 2 式を比較して

$$-f_j = Af_j$$

が得られる。

以上で命題が示された。
(証明終)

補足ノート
何か“ややこしい”K-線型写像があるとき、線型空間の基底をうまく取ってこの写像の表現行列を対角行列に近い“簡単な”行列にすることができます。この事実（考え方）は固有値・特性方程式のところに端を発して、ジョルダン標準形などの話へとつながっていきます。

問３

線型空間 V から V 自身への線型写像 $P_1, \cdots, P_k$ が、

1) $P_j^2 = P_j,\ j = 1, \cdots, k$
2) $P_j P_k = 0,\ j \neq k$
3) $P_1 + \cdots + P_k = \mathrm{id}_V$

を満たすとき、$W_j = \operatorname{Im} P_j$ とすると、$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ となることを示せ。ただし、3) の左辺は $f(v) = P_1(v) + \cdots + P_k(v)$ で定まる線型写像を表す。

示すべきことは、直和であることと、その直和が全体に等しくなることの２つ。

ちなみに、2) と 3) から 1) が導けるので、1) は本質的には必要ありません。

解答

　i を固定する。

$a \in W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_k)$ とすると、$a_1, \cdots, a_k \in V$ を用い

$$a = P_i(a_i) = P_1(a_1) + \cdots + P_{i-1}(a_{i-1}) + P_{i+1}(a_{i+1}) + \cdots + P_k(a_k) \qquad (*)$$

とかける。すると、(*) の左辺と右辺に P_i を施すことにより

$$P_i(a) = P_i P_1(a_1) + \cdots + P_i P_{i-1}(a_{i-1}) + P_i P_{i+1}(a_{i+1}) + \cdots + P_i P_k(a_k) = 0$$

であり、また (*) の 左辺 = 中辺 を考えると、$a = 0$ である。

従って任意の i について $W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_k) = \{0\}$ であるので、$W_1 + \cdots + W_k$ は直和である。

　また、任意の $v \in V$ に対し

$$\begin{aligned} v &= \mathrm{id}_V(v) \\ &= (P_1 + \cdots + P_k)(v) \\ &= P_1(v) + \cdots + P_k(v) \end{aligned}$$

であるから、$^\forall v \in V,\ v \in W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ である。

従って $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ である。

　以上で示された。

(証明終)

問５

$f : V \to V$ を線型変換、$\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ を V の基底とする。ここで A を f の $\mathcal{E}$ に関する行列表示、A' を f の $\mathcal{E}'$ に関する行列表示とするとき、$\det A' = \det A,\ \operatorname{tr} A' = \operatorname{tr} A$ が成り立つことを示せ。

特に解説は必要ないでしょう。

解答　$\mathcal{E}$ から $\mathcal{E}'$ への基底の変換行列を P とすると、$A' = P^{-1}AP$ である。
従って、

$$\det A' = \det P^{-1} \det A \det P = \det P^{-1} \det P \det A = \det A$$

また、

$$\operatorname{tr} A' = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(P^{-1}PA) = \operatorname{tr} A$$

である。これで示された。
(証明終)

補足ノート

今まで $M_n(K)$ の行列式やトレースを普通に使っていましたが、$M_n(K)$ を K-線型空間とみると、その構造というか元の見た目が基底の取り方によって変わるのですから、行列式・トレースといった概念が基底によらず一定なのか調べる必要があり、この問はそれを実行することを求めています。もし基底により値が変わるなら、「A の $\mathcal{E}$ に関する行列式」といった表現をしなければならなくなるわけです（表現行列を思い出してください）。

問 6

V_1, V_2, V_3 を K-線型空間、$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ をそれぞれ V_1, V_2, V_3 の K 上の基底とする。$f : V_1 \to V_2$, $g : V_2 \to V_3$ をそれぞれ K-線型写像、A_f, A_g をそれぞれ f の $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ に関する行列表示、g の $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ に関する行列表示とするとき、$g \circ f$ の $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3$ に関する行列表示は $A_g A_f$ であることを示せ。

当たり前というか、「まぁそりゃ成り立ってるだろうな」という性質の問題ですね。

ポイントは、行列表示の定義をおさえていること。

解答　$i = 1, 2, 3$ に対し $\dim V_i = n_i$ とし、K^{n_i} から $\mathcal{E}_i$ を基底としての V_i へ自然に定まる同型写像を ψ_i とする（下の可換図式を参照）。

$$\begin{array}{ccccc}
K^{n_1} & & K^{n_2} & & K^{n_3} \\
{\scriptstyle \psi_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle \psi_2}\big\downarrow & & {\scriptstyle \psi_3}\big\downarrow \\
V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 & \xrightarrow{g} & V_3
\end{array}$$

すると $T_{A_f} = \psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1}$, $T_{A_g} = \psi_3 \circ g \circ \psi_2^{-1}$ であるから

$$T_{A_g A_f} = T_{A_g} \circ T_{A_f} = \psi_3 \circ g \circ \psi_1^{-1}$$

すなわち、$A_g A_f$ は $g \circ f$ の $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3$ に関する行列表示になっている。

(証明終)

第 9 回（04/10/20）

問 1

V を K-線型空間とする。

1) $\mathcal{E},\ \mathcal{E}'$ を V の 2 つの基底とし、$\mathcal{E}$ から $\mathcal{E}'$ への基底の変換行列を A とする。このとき、恒等写像 $\mathrm{id}_V : V \to V$ の $\mathcal{E},\ \mathcal{E}'$ に関する行列表示を A を用いて表せ。
ヒント：答はやや直感に反するので違和感を持つかもしれない。
2) $f : V \to V$ を K-線型変換とし、V の基底 $\mathcal{E}$ をひとつ固定する。f の $\mathcal{E}$ に関する行列表示を A とするとき、A が正則行列であることと、f が K-線型同型写像であることは同値であることを示せ。
3) $f : V \to V$ を K-線型変換とする。このとき次の 3 条件が同値であることを示せ。
   i) V の任意の基底 $\mathcal{E}$ に関して f の $\mathcal{E}$ に関する行列表示が正則行列となる。
   ii) V のある基底 $\mathcal{E}$ に関して f の $\mathcal{E}$ に関する行列表示が正則行列となる。
   iii) f は K-線型同型写像である。

1) 一方の基底をもう一方の基底の 1 次結合で表してみます。

解答　$\dim V = n$ とし、$\mathcal{E} = \{e_1, \cdots, e_n\}, \mathcal{E}' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ とする。
いま $\mathcal{E}'$ から $\mathcal{E}$ への基底の変換行列は A^{-1} なので、$A^{-1} = (b_{ij})$ とすると、

$$e_l = b_{1l}e'_1 + \cdots + b_{nl}e'_n \ (l = 1, \cdots, n)$$

である。従って、

$$\mathrm{id}_V(e_l) = e_l = b_{1l}e'_1 + \cdots + b_{nl}e'_n \ (l = 1, \cdots, n)$$

であるから、id_V の基底 $\mathcal{E},\ \mathcal{E}'$ に関する行列表示は

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A^{-1}}$$

である。

2) 行列と対応させれば明らかでしょう。

解答　A が正則であるとすると、逆行列 A^{-1} が存在する。そこで A^{-1} に対応する K-線型写像を g とすると、

$$A \cdot A^{-1} = I_n \quad (n = \dim V)$$

より

$$f \circ g = \mathrm{id}_V$$

である。従って、f は K-線型同型写像である。
　逆に、f が K-線型同型写像であれば

$$f \circ g = \mathrm{id}_V$$

なる K-線型写像 g が存在し、g の $\mathcal{E}$ に関する行列表示を B とすると

$$AB = I_n$$

これは、B が A の逆行列であることを意味する。すなわち A は正則である。

3) この結論は 1 つの集大成（？）です。問題の内容としては、もう示したことばかり。

解答

- i)$\Longrightarrow$ii)
  明らかである。
- i)$\Longleftrightarrow$iii)
  前問 2) において、基底 $\mathcal{E}$ をどうとっても証明の議論は成立する。
- ii)$\Longrightarrow$iii)
  これも 2) で示した。

以上から、与えられた 3 条件は同値である。

補足ノート

ii)$\Longrightarrow$i) の証明：
V のある基底 $\mathcal{E}_0$ に関して f の $\mathcal{E}_0$ に関する行列表示が

$$A_0 \in GL_n(K)$$

になったとする。いま V の基底 $\mathcal{E}$ を任意に選び、$\mathcal{E}_0$ から $\mathcal{E}$ への変換行列を P とすると、f の $\mathcal{E}$ に関する行列表示は

$$A = A_0 P$$

となる。$P \in GL_n(K)$ だから $A \in GL_n(K)$ である。
（証明終わり）

問 2

2 次の複素行列 A を、

$$A = \begin{pmatrix} a_1 + b_1\sqrt{-1} & a_2 + b_2\sqrt{-1} \\ a_3 + b_3\sqrt{-1} & a_4 + b_4\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \text{ただし、} a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

により定め、$\mathbb{C}$-線型写像 $T_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ を $T_A(x) = Ax \ (x \in \mathbb{C}^2)$ で定める。いま $\mathbb{C}^2$ を $\mathbb{R}$-の基底 $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{-1} \end{pmatrix} \right\}$ によって $\mathbb{R}$-線型空間とみなすとき、$\mathbb{R}$-線型写像 T_A の基底 $\mathcal{E}$ に関する行列表示を求めよ。

正直に、任意の $\mathbb{C}^2$ の元について計算しても構いませんが、工夫により楽ができます。

解答

$\mathcal{E}$ の各ベクトルに T_A を施すと

$$\begin{aligned} T_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1\sqrt{-1} \\ a_3 + b_3\sqrt{-1} \end{pmatrix} \\ T_A \begin{pmatrix} \sqrt{-1} \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -b_1 + a_1\sqrt{-1} \\ -b_3 + a_3\sqrt{-1} \end{pmatrix} \\ T_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_2 + b_2\sqrt{-1} \\ a_4 + b_4\sqrt{-1} \end{pmatrix} \\ T_A \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_2 - a_2\sqrt{-1} \\ b_4 - a_4\sqrt{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

従って、T_A の基底 $\mathcal{E}$ に関する表現行列は

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{-b_1} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} \\ \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{-a_2} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{-b_3} & \boldsymbol{a_4} & \boldsymbol{b_4} \\ \boldsymbol{-b_3} & \boldsymbol{-a_3} & \boldsymbol{-b_4} & \boldsymbol{a_4} \end{pmatrix}$$

である。

問3

$\mathbb{R}$ を通常の $\mathbb{R}$-線型空間とし、$\mathbb{R}^\times = \{t \in \mathbb{R} | t > 0\}$ を

和　　：$t, s \in \mathbb{R}^\times$ に対し、$t \oplus s = ts$　　（実数の積）
スカラー倍: $\lambda \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^\times$ に対し、$\lambda \otimes t = t^\lambda$　（実数の冪乗）

で定めた $\mathbb{R}$-線型空間とする。また $\mathbb{R}$-線型写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ を $f(x) = e^x$ で定める。$\mathbb{R}$ の基底として $\mathcal{E} = \{2\}$、$\mathbb{R}^\times$ の基底として $\mathcal{F} = \{2\}$ をとるとき、f の基底 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ に関する行列表示を求めよ。
ヒント：「行列」とは言うものの、サイズは 1×1 である。

定義に忠実に計算してもあまり面倒ではありません。$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^\times$ への写像は、同型となるよううまく定めてください。

解答

$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\varphi_1(x) = 2x\ (x \in \mathbb{R})$、$\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ を $\varphi_2(x) = 2^x\ (x \in \mathbb{R})$ で定める。明らかに $\varphi_1,\ \varphi_2$ は同型であり、$\mathbb{R}$ の標準基底 $\{1\}$ をそれぞれ $\mathcal{E},\ \mathcal{F}$ へ写す。

すると、求める行列は $\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1$ の、標準基底に関する行列表示である（下の図式を参照)。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^\times \\ {\scriptstyle \varphi_1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \varphi_2} \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

$x \in \mathbb{R}$ として

$$\begin{aligned} \varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1(x) &= \varphi_2^{-1} \circ f(2x) \\ &= \varphi_2^{-1}(e^{2x}) \\ &= \log_2 e^{2x} \\ &= \frac{2}{\log 2} x \end{aligned}$$

従って、f の基底 $\mathcal{E},\ \mathcal{F}$ に関する行列表示は $\boldsymbol{\dfrac{2}{\log 2} x}$ である。

問 4

V, W を K-線型空間とする。このとき V と W の直和 $V \oplus W$ の部分集合 $\{(v,0)|v \in V\}$ を V と、$\{(0,w)|w \in W\}$ を W とそれぞれ同一視する。

1) 上のように $V \subset V \oplus W,\ W \subset V \oplus W$ とみなすと、V, W はそれぞれ $V \oplus W$ の K-線型部分空間となることを示せ。
2) 上のように $V \subset V \oplus W,\ W \subset V \oplus W$ とみなすと、$V \cap W = \{0\},\ V + W = V \oplus W$ であることを示せ。

1) 演算が線型の条件を満たしていることは分かっているので、V, W がそれぞれ $V \oplus W$ の演算について閉じていることを示せばいいわけです。

解答

$V_1 = (v_1, 0),\ V_2 = (v_2, 0) \in V$ に対し、

$$V_1 + V_2 = (v_1 + v_2, 0) \in V$$

また、$V = (v, 0) \in V,\ \lambda \in K$ に対し、

$$\lambda V = (\lambda v, 0) \in V$$

従って、V は $V \oplus W$ の K-線型部分空間である。
同様に、W は $V \oplus W$ の K-線型部分空間であることも示される。

2) 主張は明らかです。分からなければ、座標平面上の x 軸と y 軸を思い浮かべてください。

解答

$x = (v, w) \in V \oplus W$ が $x \in V \cap W$ を満たすとすると、$x \in V$ より $w = 0$、$x \in W$ より $v = 0$ となり結局 $x = 0$ 。従って $V \cap W = \{0\}$ である。
また、$x = (v, w) \in V \oplus W$ に対し

$$(v, w) = (v', 0) + (0, w')$$

とすれば $v' = v, w' = w$ となり、$v',\ w'$ は一意に定まる。つまり、任意の $V \oplus W$ の元を V, W の元の和で表す方法は一通りしかないから $V \oplus W = V + W$ が成り立つ。

補足ノート

講義で直和の定義が 2 つ与えられていましたが、この結論から、それぞれの定義を同一視してもあまり困らないことが分かります。

問5

V を n-次元の K-線型空間とするとき、K-線型空間 V^* を

$$V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K) = \{f : V \to K | f \text{ は } K\text{-線型写像 }\}$$

と定める。ここで、

1) $f_1, f_2 \in V^*$ に対して、$f_1 + f_2 \in V^*$ を $(f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v),\ v \in V$
2) $\lambda \in K,\ f \in V^*$ に対して λf を $(\lambda f)(v) = \lambda f(v),\ v \in V$

として和・積をそれぞれ定める。但し、それぞれの等式の右辺は K の元（要するに数）としての和や積である。

1) V^* は上の演算で K-線型空間であることを示せ（一回目の問 11 と問 12 の特別な場合）。

ここで、$\mathcal{E} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ を V の K-上の基底とする。

2) V から K への K-線型写像（すなわち、$\mathrm{Hom}_K(V, K)$ の元）e_i^* であって、条件

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

を満たすものが唯一存在することを示せ。
3) $\mathcal{E}^*$ は V^* の K-上の基底をなすことを示せ。したがって V^* は n-次元である。
4) $f : V \to V$ を K-線型変換とする。V^* 上で定まった写像 f^* を $f^*(g) = g \circ f,\ g \in V$ と定めると、f^* は V^* から V^* への K-線型写像であることを示せ。
5) f の $\mathcal{E}$ に関する行列表示を A とするとき、f^* の $\mathcal{E}^* = \{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ に関する行列表示を求めよ。

1)（退屈な）確認作業だけなので省略します。問題文にもあるように、既出の問題です。

2) これも、どこかで見たことがある問題。

解答　基底 $\mathcal{E}$ に関して $E_i = (0, \ldots, 0, \overset{i}{\check{1}}, 0, \ldots, 0)$ なる行列表示をもつ K-線型写像を e_i' とする。すると

$$e_i'(e_j) = E_i(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

を満たす。そこで $e_i^* = e_i'$ とすればよい。

一意性は、$f_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ とすると、

$$(f_i^* - e_i^*)(e_j) = f_i^*(e_j) - e_i^*(e_j) = 0 \quad ({}^\forall j)$$

より $f_i = e_i^*$ であるから、満たされる。

3) 原理的には簡単です。表現に苦労するかもしれません。

解答

$f \in V^*$ とし、$f(e_i) = f_i$ とする。${}^\forall v = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \in V$ に対し、

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} c_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$$

一方、$g = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i^*$ とおくと、

$$\begin{aligned} g(v) &= g\left(\sum_{i=1}^{n} c_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i g(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\{ c_i \sum_{j=1}^{n} f_j e_j^*(e_i) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \end{aligned}$$

従って、${}^\forall f \in V^*,\ f = f_1 e_1^* + \cdots + f_n e_n^*$ なので $\{e_1^*,\ \cdots,\ e_n^*\}$ は V^* を生成する。

また、$h = h_1 e_1^* + \cdots + h_n e_n^* (\in V^*) = 0\ \ (h_i \in K)$ とすると、$h(e_i) = 0$ より $d_i = 0$

従って、$d_1 = \cdots = d_n = 0$ であるから、$\{e_1^*,\ \cdots,\ e_n^*\}$ は V^* を生成する。

以上から、$\{e_1^*,\ \cdots,\ e_n^*\}$ は V^* の基底である。

4) 線型写像であることの証明はもう何度も出てきましたね。$f^*(g)$ が V^* の元になることも言っておきましょう。

解答

$f^*(g) = g \circ f$ は K-線型写像同士の積なので、また K-線型写像である。すなわち、$f^*(g) \in V^*$ である。

$g_1, g_2 \in V^*$ とする。${}^\forall v \in V$ について、

$$\begin{aligned} f^*(g_1 + g_2)(v) &= \{(g_1 + g_2) \circ f\}(v) \\ &= (g_1 + g_2) \cdot (f(v)) \\ &= g_1(f(v)) + g_2(f(v)) \\ &= (g_1 \circ f)(v) + (g_2 \circ f)(v) \\ &= f^*(g_1)(v) + f^*(g_2)(v) \\ &= (f^*(g_1) + f^*(g_2))(v) \\ \therefore f^*(g_1 + g_2) &= f^*(g_1) + f^*(g_2) \end{aligned}$$

また、$\lambda \in K,\ g \in V^*$ について、${}^\forall v \in V$ に対し、

$$\begin{aligned} f^*(\lambda g)(v) &= ((\lambda g) \circ f)(v) \\ &= (\lambda g)(f(v)) \\ &= \lambda \cdot g(f(v)) \\ &= \lambda \cdot g \circ f(v) \\ &= \lambda \cdot f^*(g)(v) \end{aligned}$$

$$\therefore f^*(\lambda g) = \lambda \cdot f^*(g)$$

以上から、f^* は V^* から V^* への K-線型写像である。

5) V^* の基底 $\{e_1^*,\ \cdots,\ e_n^*\}$ のそれぞれについて、f^* を施してみて、結果を並べればいいわけですね。

解答

任意の $v \in V$ について、次の式が成り立つ。ただし、v の $\mathcal{E}$ に関する成分表示を

$$v = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

とし、$A = (a_{ij})$ とする。

$$\begin{aligned} f^*(e_i^*)(v) &= (e_i^* \circ f)(v) \\ &= e_i^*(f(v)) \\ &= e_i^*(c_1 f(e_1) + \cdots + c_n f(e_n)) \\ &= e_i^*(c_1 \sum_{j=1}^{n} a_{1j} e_j + \cdots + c_n \sum_{j=1}^{n} a_{nj} e_j) \\ &= c_1 a_{1i} + \cdots + c_n a_{ni} \\ &= \begin{pmatrix} a_{1i} & \cdots & a_{ni} \end{pmatrix} v \end{aligned}$$

従って、f の行列表示は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$$

である。

第 10 回（04/11/10）

問 2

$V,\ W$ を K-線型空間、$\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ を V の、$\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ を W のそれぞれ内積 $(K=\mathbb{R})$ あるいはエルミート内積 $(K=\mathbb{C})$ とする。このとき、$V\oplus W$ 上で演算 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V\oplus W}$ を、$u_1=(v_1,w_1),\ u_2=(v_2,w_2)\in V\oplus W$ であるとき

$$\langle u_1,u_2\rangle_{V\oplus W}=\langle v_1,v_2\rangle_V+\langle w_1,w_2\rangle_W$$

として定める。すると、$\langle\cdot,\cdot\rangle_{V\oplus W}$ の内積あるいはエルミート内積であることを示せ。

定義に従っていろいろ確かめるだけです。面倒ですが、やっていることは簡単です。

解答 $K=\mathbb{C}$ としてエルミート内積であることを示せば十分。

i) 任意の $u_1=(v_1,w_1),\ u_1'=(v_1',v_2'),\ u_2=(u_2,w_2)\in V\oplus W$ について、

$$\begin{aligned}\langle u_1+u_1',u_2\rangle_{V\oplus W}&=\langle v_1+v_1',v_2\rangle_V+\langle w_1+w_1',w_2\rangle_W\\&=\langle v_1,v_2\rangle_V+\langle v_1',v_2\rangle_V+\langle w_1,w_2\rangle_W+\langle w_1',w_2\rangle_W\\&=\langle u_1,u_2\rangle_{V\oplus W}+\langle u_1',u_2\rangle_{V\oplus W}\end{aligned}$$

また、任意の $u_1=(v_1,w_1),\ u_2=(u_2,w_2),\ u_2'=(u_2',w_2')\in V\oplus W$ について、

$$\begin{aligned}\langle u_1,u_2+u_2'\rangle_{V\oplus W}&=\langle v_1,v_2+v_2'\rangle_V+\langle w_1,w_2+w_2'\rangle_W\\&=\langle v_1,v_2\rangle_V+\langle v_1,v_2'\rangle_V+\langle w_1,w_2\rangle_W+\langle w_1,w_2'\rangle_W\\&=\langle u_1,u_2\rangle_{V\oplus W}+\langle u_1,u_2'\rangle_{V\oplus W}\end{aligned}$$

が成り立つ。

ii) 任意の $\lambda\in\mathbb{C},\ u_1=(v_1,w_1),\ u_2=(v_2,w_2)\in V\oplus W$ について、

$$\begin{aligned}\langle\lambda u_1,u_2\rangle_{V\oplus W}&=\langle\lambda v_1,v_2\rangle_V+\langle\lambda w_1,w_2\rangle_W\\&=\lambda\langle v_1,v_2\rangle_V+\lambda\langle w_1,w_2\rangle_W\\&=\lambda(\langle v_1,v_2\rangle_V+\langle w_1,w_2\rangle_W)\\&=\lambda\langle u_1,u_2\rangle_{V\oplus W}\\\langle u_1,\lambda u_2\rangle_{V\oplus W}&=\langle v_1,\lambda v_2\rangle_V+\langle w_1,\lambda w_2\rangle_W\\&=\overline{\lambda}\langle v_1,v_2\rangle_V+\overline{\lambda}\langle w_1,w_2\rangle_W\\&=\overline{\lambda}(\langle v_1,v_2\rangle_V+\langle w_1,w_2\rangle_W)\\&=\overline{\lambda}\langle u_1,u_2\rangle_{V\oplus W}\end{aligned}$$

が成り立つ。

iii) 任意の $u_1=(v_1,w_1),\ u_2=(v_2,w_2)\in V\oplus W$ について、

$$\begin{aligned}\langle u_1,u_2\rangle_{V\oplus W}&=\langle v_1,v_2\rangle_V+\langle w_1,w_2\rangle_W\\&=\overline{\langle v_2,v_1\rangle_V}+\overline{\langle w_2,w_1\rangle_W}\\&=\overline{\langle u_2,u_1\rangle_{V\oplus W}}\end{aligned}$$

が成り立つ。

iv) 任意の $u=(v,w)\in V\oplus W$ について、

$$\begin{array}{cccccc}\langle u,u\rangle_{V\oplus W}&=&\langle v,v\rangle_V&+&\langle w,w\rangle_W\\&\geq&0&+&0\\&=&0\end{array}$$

が成り立ち、等号成立は $v=0$ かつ $w=0$ 、すなわち $u=0$ のときに限る。

以上から、$\langle\cdot,\cdot\rangle_{V\oplus W}$ はエルミート内積である。

問 3

$X = M_{m,n}(K)$ とし、X を m 次の縦ベクトル $x_1, \cdots, x_n$ を用いて $X = (x_1, \cdots, x_n)$ と表す。

1) K^n の部分空間 $W_1, \cdots, W_n$ を

$$\begin{aligned} W_i &= x_1, \cdots, x_i \text{で } K \text{ 上生成される } K^m \text{の部分空間} \\ &= \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_i x_i \mid \lambda_1, \cdots, \lambda_i \in K\} \end{aligned}$$

として定める。また、$W_0 = \{0\}$ と定める。このとき、$\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_n \subset K^m$ であることを踏まえて次を示せ。

i) $i = 0, 1, \cdots, n-1$ について、$0 \leq \dim_K W_{i+1} - \dim_K W_i \leq 1$ を示せ。

ii) $r = \operatorname{rank}_K X$ とすると、$W_i \subsetneq W_{i+1}$ なる $i (0 \leq i \leq n-1)$ は丁度 r 個であることを示せ。特に、$\dim_K W_n = r$ である。

2) 1) を踏まえて、$i(0), \cdots, i(r-1)$ を $W_i \subsetneq W_{i+1}$ なる i を小さい順に並べたものとする。このとき、K^m の標準的な内積 (エルミート内積) に関する正規直交基底 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ であって、$e_1, \cdots, e_t$ が $W_{i(t-1)+1}, \cdots, W_{i(t)}$ の基底であるようなものが存在することを示せ。但し、$1 \leq t \leq r$ とし、$i(r) = n$ と定める。

3) 2) のような性質を持つ基底 $e_1, \cdots, e_m$ を並べて得られる行列を Q とする。Q は直交基底 ($K = \mathbb{R}$ の時) またはユニタリ行列 ($K = \mathbb{C}$ の時) であることを示せ。

4) ある行列 $R = (r_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ で $i > j$ のとき $r_{ij} = 0$ であって、$X = QR$ を満たすものが存在することを示せ。
ヒント：$k \leq i(k)$ に注意せよ。

1) i) 主張は、基底に一つベクトルを加えて新しい基底としても次元が 2 以上増えることはないという、当たり前のことです。

解答　$\dim_K W_i = l$ とすると、$x_1, \cdots, x_i$ のうちから一次独立な l 本のベクトルを取れる。その組 (の一つ) を $x_{a(1)}, \cdots, x_{a(l)}$ とする。

すると、$x_{a(1)}, \cdots, x_{a(l)}, x_{i+1}$ が一次独立であれば $\dim_K W_{i+1} = l + 1$ であり、これらが一次従属であれば結局 $x_{a(1)}, \cdots, x_{a(l)}$ が W_{i+1} の基底となり、$\dim_K W_{i+1} = l$ である。

以上から、

$$\dim_K W_{i+1} = \dim_K W_i \quad \text{or} \quad \dim_K W_i + 1$$

であり、主張が示された。

1) ii) $W_n = \operatorname{Im} f$ ($f : K^n \to K^m$ は X に対応する写像) に気づけば楽。

解答　$W_i \subsetneq W_{i+1}$ なる i の個数を N とする。i) から、$\dim_K W_n = N$ である。ところが、X に対応する線型写像 $K^n \to K^m$ を f とすると $W_n = \operatorname{Im} f$ である。従って $\dim_K W_n = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} X = r$ であるから $N = r$ である。

2) 帰納法。端の様子を考えるのが面倒です。

問 4

P を以下の行列とするとき、そのグラムシュミット分解 (QR 分解)$P = QR$ を、Q が直交行列 (ユニタリ行列)、R が対角成分が全て非負であるような上三角行列となるように与えよ。

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 1+\sqrt{-1} & 2 & \sqrt{-1} \\ 1 & 1 & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & \sqrt{-1} & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

$$3)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad 4)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

1) 計算ミスに気をつけましょう。試験でそのまま書ける程度の詳しさで解答を書いておきます。

解答

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

において、

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ p_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする。まず、p_1, p_2, p_3 から Gram-Schmidt の方法で正規直交基底を作る。

まず

$$e_1' = p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とすると $||e_1'|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$ であるから

$$e_1 = \frac{e_1'}{||e_1'||} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である。次に

$$\langle p_2, e_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$$

であるから

$$e_2' = p_2 - \langle p_2, e_1 \rangle e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると $||e_2'|| = \frac{1}{3}\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 1$ であるから、

$$e_2 = \frac{e_2'}{||e_2'||} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする。最後に

$$\langle p_3, e_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{4}{3}$$

$$\langle p_3, e_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{2}{3}$$

であるから

$$\begin{aligned} e_3' &= p_3 - \langle p_3, e_1\rangle e_1 - \langle p_3, e_2\rangle e_2 \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{5}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とすると $||e_3'|| = \frac{5}{9}\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2} = \frac{5}{3}$ であるから

$$e_3 = \frac{e_3'}{||e_3'||} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

とする。

こうして作った e_1, e_2, e_3 は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である。

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \boldsymbol{= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

とする。Q はユニタリ行列（直交行列）である。いま

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{3}p_1 \\ e_2 &= 1(p_2 - 1e_1) = -\frac{1}{3}p_1 + p_2 \\ e_3 &= \frac{3}{5}(p_3 - \frac{4}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2) = -\frac{2}{15}p_1 - \frac{2}{5}p_2 + \frac{3}{5}p_3 \end{aligned}$$

であるから、

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{15} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

とすれば、$P = QR$ となる。$(R^{-1} \mid I_3)$ を行基本変形していくと、

$$
\begin{pmatrix}
\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{15} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\text{3 行目}\times(5/3)]{\text{1 行目}\times 3,}
\begin{pmatrix}
1 & -1 & -\frac{2}{5} & 3 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3}
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\text{1 行目に } +(\text{2 行目})}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & -\frac{4}{5} & 3 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3}
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\text{2 行目に } +((2/5)\times(\text{3 行目}))]{\text{1 行目に } +((4/5)\times(\text{3 行目}))}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 3 & 1 & \frac{4}{3} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3}
\end{pmatrix}
$$

となるので、

$$
\boldsymbol{R} = (R^{-1})^{-1}
\begin{pmatrix}
\mathbf{3} & \mathbf{1} & \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} \\
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}
\end{pmatrix}
$$

である。

以上で、$P = QR$ と QR 分解できた。

2) 複素数計算にも慣れておきましょう。原理は分かっていても、実際やってみると意外と苦戦します（僕は苦戦しました）。考え方や答案のフォーマットは 1) と同様ですので、途中の主な計算と結果だけ書いておきます。

解答

$i = \sqrt{-1}$ とかくことにする。

$$P = \begin{pmatrix} 1+i & 2 & i \\ 1 & 1 & -i \\ -i & i & -i \end{pmatrix},\ \ p_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix},\ p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ i \end{pmatrix},\ p_3 = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ -i \end{pmatrix}$$

$$e_1' = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix},\ ||e_1'|| = 2, \quad \therefore e_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\langle p_2, e_1 \rangle = 1 - i \quad \therefore e_2' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 1+3i \end{pmatrix},\ ||e_2'|| = 2, \quad \therefore e_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 1+3i \end{pmatrix}$$

$$\langle p_3, e_1 \rangle = 1,\ \langle p_3, e_2 \rangle = -1, \quad \therefore e_3' = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2i \\ -1-3i \\ 1+i \end{pmatrix},\ ||e_3'|| = 1, \quad \therefore e_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2i \\ -1-3i \\ 1+i \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+2i & 2 & 2i \\ 2 & 1+i & -1-3i \\ -2i & 1+3i & 1+i \end{pmatrix}}$$

$$R^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1+i & -3+i \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \therefore \boldsymbol{R = \begin{pmatrix} 2 & 1-i & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

3) 他の 3 問は演習書からの抜粋ですが、これは足助先生オリジナルです。ということは……計算の複雑さは想像できますね。ヒマな人、Mな人は解いてみるのもいいでしょう。そうでない人はこれを解くよりほかにすべきことがあると思います。解答は 2) と同様、主な計算と結果のみにとどめます。

解答

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix},\ \ p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ p_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ p_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ ||e_1'|| = \sqrt{6}, \quad \therefore e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle p_2, e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \therefore e_2' = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 17 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix},\ ||e_2'|| = \frac{1}{6}\sqrt{354}, \quad \therefore e_2 = \frac{1}{\sqrt{354}}\begin{pmatrix} 17 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle p_3, e_1 \rangle = 0,\ \langle p_3, e_2 \rangle = \frac{30}{\sqrt{354}} \quad \therefore e_3' = \frac{33}{59}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix},\ ||e_3'|| = \frac{33}{\sqrt{59}}, \quad \therefore e_3 = \frac{1}{\sqrt{59}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q = \frac{1}{\sqrt{354}}\begin{pmatrix} \sqrt{59} & 17 & \sqrt{6} \\ -2\sqrt{59} & 8 & -3\sqrt{6} \\ \sqrt{59} & -1 & -7\sqrt{6} \end{pmatrix}}$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{354}} & \frac{5}{33\sqrt{59}} \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{354}} & -\frac{10}{11\sqrt{59}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{59}}{33} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{354}}{6} & \frac{5\sqrt{354}}{59} \\ 0 & 0 & \frac{33\sqrt{59}}{59} \end{pmatrix}}$$

4) 4 次になっても考え方は同じです。この行列の場合、計算は比較的楽でしょう。これも主な計算と結果のみ掲載します。

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&-1&-2\\1&-3&1&2\\1&-3&-1&4\end{pmatrix},\ p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\-3\end{pmatrix},\ p_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\ p_4=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\\4\end{pmatrix}$$

$$e_1'=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ ||e_1'||=2,\quad \therefore e_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\langle p_2,e_1\rangle=-2\quad \therefore e_2'=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix},\ ||e_2'||=4,\quad \therefore e_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\langle p_3,e_1\rangle=0,\ \langle p_3,e_2\rangle=0\quad \therefore e_3'=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad ||e_3'||=2,\quad \therefore e_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\langle p_4,e_1\rangle=2,\ \langle p_4,e_2\rangle=-4,\ \langle p_4,e_3\rangle=0\quad \therefore e_4'=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\ ||e_4'||=2,\quad \therefore e_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{-1}\\\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}\\\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{-1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

解答

$$R^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\0&1&0&2\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{-2}&\mathbf{0}&\mathbf{2}\\\mathbf{0}&\mathbf{4}&\mathbf{0}&\mathbf{-4}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{2}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$$

問 5

$V = \{$ 高々 2 次の t に関する $\mathbb{R}$ 係数の多項式 $\}$ とし、V の基底として $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ をとる。いま、V 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を $f, g \in V$ に対し、

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(s)g(s)ds$$

で定める（とりあえずこれが内積であることは認めてよい）。

1) 内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の、基底 $\mathcal{E}$ に関する行列表示を求めよ。

ここで、$f, g \in V$ と自然数 $k = 1, 2, \cdots$ に対し、

$$\langle f, g\rangle_k = \langle f, g\rangle + \sum_{i=1}^{k} \langle \frac{d^i f}{dt^i}, \frac{d^i g}{dt^i}\rangle$$

とすると、これも V の内積である（今の場合は $k \geq 3$ であれば $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$ は全て等しい）。

2) 各 k に対し、内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$ の基底 $\mathcal{E}$ に関する行列表示を求めよ。
3) 内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ に関する V の正規直交基底を一つ求めよ。
4) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が内積であることを確かめよ。
5)* 各 k について $\langle f, g\rangle_k$ は V 上の内積となることを示せ。

4), 5) のヒント：f, g を C^∞ 級関数だと思って、解析に持ち込むことも出来るし、今は f, g は多項式なので内積を具体的に t の $\mathbb{R}$ 係数の多項式として計算してから調べることも出来る。多少解析の知識が必要になるが、証明抜きで適宜使ってよい。

* 編注：配布プリントではここで $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$ の定義がもう一度述べられていましたが、必要ないので削除しました。

1) 一般に、「内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の、基底 $\mathcal{E} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ に関する行列表示」とは、(i, j)-成分が $\langle e_i, e_j\rangle$ であるような行列をいいます。

解答

定義に従って計算すると

$$\langle 1, 1\rangle = \int_{-1}^{1} ds = 2$$
$$\langle t, 1\rangle = \langle 1, t\rangle = \int_{-1}^{1} sds = 0$$
$$\langle t^2, 1\rangle = \langle 1, t^2\rangle = \int_{-1}^{1} s^2 ds = \frac{2}{3}$$
$$\langle t, t\rangle = \int_{-1}^{1} s^2 ds = \frac{2}{3}$$
$$\langle t^2, t\rangle = \langle t, t^2\rangle = \int_{-1}^{1} s^3 ds = 0$$
$$\langle t^2, t^2\rangle = \int_{-1}^{1} s^4 ds = \frac{2}{5}$$

となるから、行列表示は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} & \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} \end{pmatrix}$$

2) 考え方は 1) と同じですね。1) の結果を使って、計算をサボれます。

解答

- $k = 1$ について

  f, g のいずれかが 1 のときは、$\langle f, g\rangle_1 = \langle f, g\rangle$ となる。
  その他の場合について計算すると、

$$\langle t, t\rangle_1 = \int_{-1}^{1} s^2 ds + \int_{-1}^{1} ds = \frac{8}{3}$$
$$\langle t, t^2\rangle_1 = \langle t^2, t\rangle_1 = \int_{-1}^{1} s^3 ds + \int_{-1}^{1} 2s^2 ds = \frac{3}{4}$$
$$\langle t^2, t^2\rangle_1 = \int_{-1}^{1} s^4 ds + \int_{-1}^{1} 4s^2 ds = \frac{46}{15}$$

  となるから、1) の計算とあわせて、$\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ の行列表示は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{\frac{2}{3}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\frac{8}{3}} & \mathbf{\frac{4}{3}} \\ \mathbf{\frac{2}{3}} & \mathbf{\frac{4}{3}} & \mathbf{\frac{46}{15}} \end{pmatrix}$$

  である。

- $k = 2$ について

  f, g のいずれかが 1 または t のときは、$\langle f, g\rangle_2 = \langle f, g\rangle_1$ となる。
  その他の場合について計算すると、

$$\langle t^2, t^2\rangle_2 = \langle t^2, t^2\rangle_1 + \int_{-1}^{1} 4ds = \frac{166}{15}$$

  となるから、今までの計算とあわせて、$\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ の行列表示は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{\frac{2}{3}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\frac{8}{3}} & \mathbf{\frac{4}{3}} \\ \mathbf{\frac{2}{3}} & \mathbf{\frac{4}{3}} & \mathbf{\frac{166}{15}} \end{pmatrix}$$

  である。

- $k \geq 3$ について

  f, g のいずれかが 2 次以下であれば、$\langle f, g\rangle_k = \langle f, g\rangle_2$ となる。
  f, g は必ず 2 次以下なので、$k \geq 3$ のとき $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$ の行列表示は $k = 2$ の場合と同じく、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{\frac{2}{3}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\frac{8}{3}} & \mathbf{\frac{4}{3}} \\ \mathbf{\frac{2}{3}} & \mathbf{\frac{4}{3}} & \mathbf{\frac{166}{15}} \end{pmatrix}$$

  である。

3) Gram-Schmidt の方法を $\mathcal{E}$ に適用します。計算が大変！

解答 $\mathcal{E} = \{e_1 = 1, e_2 = t, e_3 = t^2\}$ に Gram-Schmidt の正規直交化法を用いて求める。
まず $f_1' = e_1 = 1$ とする。$||f_1'||^2 = 2$ なので、

$$f_1 = \frac{f_1'}{||f_1'||} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

とする。次に

$$\begin{aligned} f_2' &= e_2 - \langle e_2, f_1\rangle_1 f_1 \\ &= t - \int_{-1}^{1} \frac{s}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} ds \\ &= t \end{aligned}$$

$||f_2'||^2 = \langle t, t\rangle_1 = \dfrac{8}{3}$ なので、

$$f_2 = \frac{f_2'}{||f_2'||} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\ t$$

とする。次に

$$\begin{aligned} f_3' &= e_3 - \langle e_3, f_1\rangle_1 f_1 - \langle e_3, f_2\rangle_1 f_2 \\ &= t^2 - \int_{-1}^{1} \left(s^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) ds \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\qquad - \left\{\int_{-1}^{1} \left(s^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\ s\right) ds + \int_{-1}^{1} \left(2s \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right) ds\right\} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\ t \\ &= t^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$||f_3'||^2 = \left\langle t^2 - \dfrac{1}{3},\ t^2 - \dfrac{1}{3}\right\rangle_1 = \langle t^2, t^2\rangle_1 - \dfrac{1}{3}\langle t^2, 1\rangle_1 - \dfrac{1}{3}\langle 1, t^2\rangle_1 + \dfrac{1}{9}\langle 1, 1\rangle_1 = \dfrac{128}{45}$ なので、

$$f_3 = \frac{f_3'}{||f_3'||} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$$

とする。以上により、

$$\{f_1, f_2, f_3\} = \boldsymbol{\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\ t,\ \frac{3}{8}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)\right\}}$$

は $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ の正規直交基底の 1 つである。

4) 問題の V に限らず、f, g が区間 $-1 \leq s \leq 1$ で定義された一般の C^{∞} 級の関数のときでも成り立つように証明します（高々 2 次の多項式であるとして、$f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ などとおいてやるより、かえって簡単でしょう）。なお、f, g の定義域を $s \in \mathbb{R}$ としてしまうと、下の証明の iv) の等号成立条件で困ったことが起きます。

解答

i) ${}^{\forall} f_1, f_2, g \in V$ について

$$\begin{aligned}\langle f_1 + f_2, g\rangle &= \int_{-1}^{1} (f_1(s) + f_2(s))g(s)ds \\ &= \int_{-1}^{1} (f_1(s)g(s) + f_2(s)g(s))ds \\ &= \int_{-1}^{1} f_1(s)g(s)ds + \int_{-1}^{1} f_2(s)g(s)ds \\ &= \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle\end{aligned}$$

が成り立ち、また、${}^{\forall} f, g_1, g_2 \in V$ について

$$\begin{aligned}\langle f, g_1 + g_2\rangle &= \int_{-1}^{1} f(s)(g_1(s) + g_2(s))ds \\ &= \int_{-1}^{1} (f(s)g_1(s) + f(s)g_2(s))ds \\ &= \int_{-1}^{1} f(s)g_1(s)ds + \int_{-1}^{1} f(s)g_2(s)ds \\ &= \langle f, g_1\rangle + \langle f, g_2\rangle\end{aligned}$$

が成り立つ。

ii) ${}^{\forall} \lambda \in \mathbb{R},\ f, g \in V$ について

$$\begin{aligned}\langle \lambda f, g\rangle &= \int_{-1}^{1} (\lambda f)(s) \cdot g(s)ds \\ &= \int_{-1}^{1} \lambda \cdot f(s) \cdot g(s)ds \\ &= \lambda \int_{-1}^{1} f(s)g(s)ds \\ &= \lambda\langle f, g\rangle \\ \langle f, \lambda g\rangle &= \int_{-1}^{1} f(s) \cdot (\lambda g)(s)ds \\ &= \int_{-1}^{1} f(s) \cdot \lambda \cdot g(s)ds \\ &= \lambda \int_{-1}^{1} f(s)g(s)ds \\ &= \lambda\langle f, g\rangle\end{aligned}$$

iii) ${}^{\forall} f, g \in V$ について

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int_{-1}^{1} f(s)g(s)ds \\ &= \int_{-1}^{1} g(s)f(s)ds \\ &= \langle g, f\rangle\end{aligned}$$

iv) ${}^{\forall} f \in V$ について

$$\langle f, f\rangle = \int_{-1}^{1} (f(s))^2 ds \geq 0$$

が成り立ち、等号成立は $f = 0$ のときのみである。

以上から、$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は内積である。

5) 一般的にやろうとすれば、まあまず帰納法でしょう。ある内積とある内積の和はあきらかにまた内積と

なるので、これを用いると簡単です。分からなければ、この場合は $k=1,2$ の 2 通りについてチェックすればいいだけなので、 4) のように地道にやっても OK です。
なお、解答では「内積と内積の和は内積」であることをちゃんと確かめていませんが、念を入れるなら試験では確かめるべきかもしれません。

解答

便宜的に、$k=0$ について $\langle\cdot,\cdot\rangle_0=\langle\cdot,\cdot\rangle$ と定める。
すると 4) より、$k=0$ のとき $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$ は内積である。
いま $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$ が内積であるとする。

$$\langle f,g\rangle_{k+1}=\langle f,g\rangle_k+\left\langle\frac{d^{k+1}f}{dt^{k+1}},\frac{d^{k+1}g}{dt^{k+1}}\right\rangle$$

である。右辺第 1 項は帰納法の仮定より内積である。右辺第 2 項は、$\dfrac{d^{k+1}f}{dt^{k+1}},\ \dfrac{d^{k+1}g}{dt^{k+1}}\in V$ より、やはり内積の条件を満たす。そこで $\left\langle\dfrac{d^{k+1}f}{dt^{k+1}},\dfrac{d^{k+1}g}{dt^{k+1}}\right\rangle=\langle f,g\rangle'$ とかくことにすると

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{k+1}=\langle\cdot,\cdot\rangle_k+\langle\cdot,\cdot\rangle'$$

とかけることになり、$\langle\cdot,\cdot\rangle_k$, $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ がともに内積なので、$\langle\cdot,\cdot\rangle_{k+1}$ も内積の条件を満たしている。
（たとえば、$^\forall f_1,f_2,g\in V$ について

$$\begin{aligned}\langle f_1+f_2,g\rangle_{k+1}&=\langle f_1+f_2,g\rangle_k+\langle f_1+f_2,g\rangle'\\&=\langle f_1,g\rangle_k+\langle f_2,g\rangle_k+\langle f_1,g\rangle'+\langle f_2,g\rangle'\\&=\langle f_1,g\rangle_{k+1}+\langle f_2,g\rangle_{k+1}\end{aligned}$$

が成り立つ。他同様）
以上から、数学的帰納法により各 k について $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$ は内積である。

第 11 回（04/12/01）

問 1

次の行列を対角化せよ。また、その際の変換行列を書け。ただし、固有値が全て実数であるような実行列は実行列で対角化すること。

$$1)\begin{pmatrix}-3&4&4\\2&1&-1\\-8&6&8\end{pmatrix}\quad 2)\begin{pmatrix}-1&0&12\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\quad 3)\begin{pmatrix}55&44&33\\27&-12&57\\-58&16&-76\end{pmatrix}$$

$$4)\begin{pmatrix}2\sqrt{2}&9\sqrt{2}-1&7\sqrt{2}-3\\0&-3\sqrt{2}+1&-3\sqrt{2}+3\\0&\sqrt{2}-1&\sqrt{2}-3\end{pmatrix}\quad 5)\begin{pmatrix}0&-2&-2i\\1-i&1-i&1-i\\1-i&1+i&1+i\end{pmatrix}\ \text{ここで、}i=\sqrt{-1}$$

$$6)\begin{pmatrix}15&4&0&-2\\-29&-7&-1&5\\10&3&1&-1\\23&7&-1&-1\end{pmatrix}\quad 7)\begin{pmatrix}2&-5&39&5&-2\\3&13&-42&9&-3\\0&2&-10&0&0\\-1&-4&11&-4&1\\3&3&8&9&-3\end{pmatrix}$$

1) 3 次の行列で固有値 3 つですから、固有ベクトルは各々（高々）一つしかありません。従って、方程式は目の子でも解が 1 つ見つかれば O.K.

行列式の因数分解は、試験ではちゃんと途中経過を書くべきかもしれません。ここでは詳しく経過を書かないことにします。

解答

問題の行列を A とする。

$$\begin{aligned}\Phi_A(t)&=\begin{vmatrix}t+3&-4&-4\\-2&t-1&1\\8&-6&t-8\end{vmatrix}\\&=t^3-6t^2+11t-6\\&=(t-1)(t-2)(t-3)\end{aligned}$$

であるから、固有値は 1,2,3 である。

固有値 1 について、方程式 $(A-I_3)v=0$ すなわち

$$\begin{pmatrix}-4&4&4\\2&0&-1\\-8&6&7\end{pmatrix}v=0$$

の解は、たとえば $v_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ がある。

次に固有値 2 について、方程式 $(A-2I_3)v=0$ すなわち

$$\begin{pmatrix}-5&4&4\\2&-1&-1\\-8&6&6\end{pmatrix}v=0$$

の解は、たとえば $v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ がある。

最後に固有値 3 について、方程式 $(A-3I_3)v=0$ すなわち

$$\begin{pmatrix}-6&4&4\\2&-2&-1\\-8&6&5\end{pmatrix}v=0$$

の解は、たとえば $v_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ がある。

以上の v_1, v_2, v_3 は一次独立だから、

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

とおくことにより、P は正則で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

と対角化される。

2) 対角化できるためには、各固有値に対して、一次独立な固有ベクトルが重複度個必要なことをおさえてください。また、三角行列の行列式は対角成分の積であることを知っていると計算が楽になります。

解答

問題の行列を A とする。

$$\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} t+1 & 0 & -12 \\ 0 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t+1)(t-2)^2$$

よって、固有値は 2(重複度 2), -1 である。

固有値 2 について、方程式 $(A - 2I_3)v = 0$ 即ち

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0$$

の解は、たとえば $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がある。

次に固有値 -1 について、方程式 $(A + I_3)v = 0$ 即ち

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} v = 0$$

の解は、たとえば $v_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ がある。

v_{-1}, v_2, v_2' は 1 次独立なので、

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} v_{-1} & v_2 & v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

とおくと P は正則であって、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

と対角化される。

3)-7) 以下、結論のみ列挙します (結論を見れば固有値・固有ベクトルといった計算過程は分かるためです)。なお 3) は相当ハードなので注意 (まあどれもハードですが…)。

解答

問題の行列を A とかく。

(3) $P = \begin{pmatrix} 11 & 11 & 0 \\ -3 & -1 & -3 \\ -7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ として、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 22 & 0 & 0 \\ 0 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & -88 \end{pmatrix}$

(4) $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ として、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

(5) $P = \begin{pmatrix} -1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ として、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(6) $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ -2 & 7 & -13 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ として、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $P = \begin{pmatrix} 4 & 15 & -6 & 11 & 1 \\ -4 & -18 & 11 & -15 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ として、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

問 2

$V = \{$ 数列 $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} \mid a_i \in \mathbb{C}\}$ とし、その部分空間

$$W = \{\{a_i\}_{i=0}^{\infty} \in V \mid a_{i+3} + 3a_{i+2} - 4a_{i+1} - 12a_i = 0\}$$

を考える。また、W の元 $\{a_0, a_1, \cdots\}$ に対し、項をひとつずらした数列 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ を対応させる線型写像を $D : W \to W$ とする。

1) D の固有値と固有ベクトルを求めよ。
2) それぞれの固有ベクトルと方程式 $t^3 + 3t^2 - 4t - 12 = 0$ の関係について述べよ。

1) 講義でやったのと全く同じ方法です。

解答

$e_1, e_2, e_3 \in W$ を

$$\begin{aligned} e_1 &= \{1, 0, 0, 12, \cdots\}, \\ e_2 &= \{0, 1, 0, 4, \cdots\}, \\ e_3 &= \{0, 0, 1, 3, \cdots\} \end{aligned}$$

と定めると、$\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ は W の基底をなす。
いま

$$\begin{array}{rclclcccrl} D(e_1) &=& \{0, 0, 12, \cdots\} &=& & & & & 12 & e_3 \\ D(e_2) &=& \{1, 0, 4, \cdots\} &=& e_1 & & & + & 4 & e_3 \\ D(e_3) &=& \{0, 1, -3, \cdots\} &=& & & e_2 & - & 3 & e_3 \end{array}$$

だから、D の $\mathcal{E}$ に関する行列表示は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

となる。よって D の固有多項式は

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ -12 & -4 & t+3 \end{vmatrix} &= t^2(t+3) - 12 - 4t \\ &= (t+3)(t+2)(t-2) \end{aligned}$$

であるから、D の固有値は $\mathbf{2, -2, -3}$ である。
固有値 2 に対する固有ベクトル $\{v_i\}_{i=0}^{\infty}$ は、$^{\forall} i,\ v_{i+1} = 2v_i$ を満たすから、たとえば $\boldsymbol{\{1, 2, 4, 8, \cdots, 2^i, \cdots\}}$ は固有ベクトルである。
同様に、
固有値 -2 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{\{1, -2, 4, -8, \cdots, (-2)^i, \cdots\}}$
固有値 -3 に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{\{1, -3, 9, -27, \cdots, (-3)^i, \cdots\}}$ である。

2) 何を書けばいいのかちょっと分かりません。とりあえず次のように書いておけばいいのかな？

解答

$t^3 + 3t^2 - 4t - 12 = 0$ の解を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とすると、$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は D の固有値であって、$\alpha_k \ (k = 1, 2, 3)$ に対する固有ベクトルは $\{1, \alpha_k, \alpha_k^2, \cdots, \alpha_k^i, \cdots\}$ となっている。

問 5

正方行列（何次でもよい）A, B であって、以下の性質を持つものを一組挙げよ。

1) $A+B$ のある固有値で、(A のある固有値)+(B のある固有値) とはならないものが存在する。
2) AB のある固有値で、(A のある固有値)$\cdot$(B のある固有値) とはならないものが存在する。

ヒント：もちろん $AB \neq BA$ なる A, B の組しか候補にはならない。

適当に（でたらめに）非可換な 2 つの行列を選んでやれば、たいてい 1), 2) とも満たしてくれます。
この問題が、1) と 2) でそれぞれ求めさせているのか、1),2) を同時に満たすということなのか微妙ですが、ここではより強い条件である後者と解釈して解答します。

解答

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

とする。

$$\Psi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -3 & t-2 \end{vmatrix} = (t-4)(t+1)$$

$$\Psi_B(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -1 & t-2 \end{vmatrix} = t(t-3)$$

であるから、A の固有値は $4, -1$ であり、B の固有値は $0, 3$ である。

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\Psi_{A+B}(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -4 \\ -4 & t-4 \end{vmatrix} = (t-3+\sqrt{17})(t-3-\sqrt{17})$$

$$\Psi_{AB}(t) = \begin{vmatrix} t-3 & -6 \\ -5 & t-10 \end{vmatrix} = t(t-13)$$

なので、$A+B$ の固有値は $3+\sqrt{17}, 3-\sqrt{17}$ であり、AB の固有値は $0, 13$ である。
以上から、冒頭の A, B は条件 1), 2) をともに満たす。

第 12 回（04/12/15）

問 1

以下の行列 A について、$A^m,\ m \in \mathbb{Z}$ を求めよ。ただし、A が n 次であれば $A^0 = I_n$ とし、また、$A^m, m < 0$ は行列が正則なときのみ $A^m = (A^{-1})^{-m}$ として定める。

1) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 10 \\ -10 & -2 & -14 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ -6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) 対角化できれば対角化、できなければ帰納法、というのがスタンダードな方法でしょう。逆行列が存在するかのチェックも忘れずに。
スペース節約のため固有多項式の計算の途中経過は省略しましたが、試験ではちゃんと書いてください。

解答

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 10 \\ -10 & -2 & -14 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} t-8 & -2 & -10 \\ 10 & t+2 & 14 \\ 3 & 1 & t+3 \end{vmatrix} = t(t-1)(t-2)$$

であり、A の固有値は $0, 1, 2$ である。

固有値 0 に対する固有ベクトルを求める。$Av = 0$ を解けばよく、

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 10 \\ -10 & -2 & -14 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1,2 行目各々 1/2 倍}]{\text{1,2 列目入れ替えて}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\text{1 列目を掃きだす}]{\text{(1,1) 成分について}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\text{2 列目を掃きだす}]{\text{(2,2) 成分について}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と基本変形できるから、0 に対する固有ベクトルは、たとえば $v_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

次に固有値 1 に対する固有ベクトルを求める。$Av = v$ すなわち $(A - I_3)v = 0$ を解けばよく、

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 10 \\ -10 & -3 & -14 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1,2 列目入れ替え}]{\text{1,3 行目入れ替えて}} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -3 & -10 & -14 \\ 2 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\text{1 列目を掃きだす}]{\text{(1,1) 成分について}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\text{2 列目を掃きだす}]{\text{(2,2) 成分について}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と基本変形できるから、1 に対する固有ベクトルは、たとえば $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

最後に、固有値 2 に対する固有ベクトルを求める。$Av = 2v$ すなわち $(A - 2I_3)v = 0$ を

解けばよく、

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ -10 & -4 & -14 \\ -3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1,2 行目各々 1/2 倍}]{\text{1,2 列目入れ替えて}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{1 列目を掃きだす}]{\text{(1,1) 成分について}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{2 列目を掃きだす}]{\text{(2,2) 成分について}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と基本変形できるから、2 に対する固有ベクトルは、たとえば $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

以上から、

$$P = \begin{pmatrix} v_0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると P は正則であって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

である（空白は 0 を示す）。両辺を m 乗すると $(m > 0)$

$$P^{-1}A^mP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2^m \end{pmatrix}$$

となるから

$$A^m = P \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2^m \end{pmatrix} P^{-1}$$

である。そこで、P の逆行列 P^{-1} を求める。

$$(P|I_3) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1,3 行目入れ替え}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{1 列目を掃きだす}]{\text{(1,1) 成分について}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{2 列目を掃きだす}]{\text{(2,2) 成分について}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{3 列目を掃きだす}]{\text{(3,3) 成分について}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

以上の変形から、$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ であるから、

$$
\begin{aligned}
A^m &= P \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2^m \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^m + 2 & 2 & 6 \cdot 2^m - 2 \\ -4 \cdot 2^m - 2 & -2 & -8 \cdot 2^m + 2 \\ -2^m - 1 & -1 & -2 \cdot 2^m + 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

一方、$Av = 0$ が解を持ったので A は正則ではない。従って、$m \leq 0$ に対して A^m は定義されない。以上をまとめると

$$
\boldsymbol{A^m = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^m + 2 & 2 & 6 \cdot 2^m - 2 \\ -4 \cdot 2^m - 2 & -2 & -8 \cdot 2^m + 2 \\ -2^m - 1 & -1 & -2 \cdot 2^m + 1 \end{pmatrix} \quad (m > 0)}
$$

また、$m \leq 0$ では定義されない。

2) 考え方は 1) と全く同様。今度は A が正則な場合です。
固有多項式の計算は、工夫すると楽にすることが出来ます。それ以降、m 乗を求める過程は 1) と同じなので省略します。

解答

$$
A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ -6 & 4 & 6 \end{pmatrix}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
\Phi_A(t) &= \begin{vmatrix} t+1 & -2 & -2 \\ -3 & t & 2 \\ 6 & -4 & t-6 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} t-2 & t-2 & 0 \\ -3 & t & 2 \\ 0 & 2t-4 & t-2 \end{vmatrix} \quad (\because 1\text{ 行目に} + (2\text{ 行目}), 3\text{ 行目に} + 2(2\text{ 行目})) \\
&= (t-2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & t & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (\because 1, 3\text{ 行目に} \times (1/(t-2))) \\
&= (t-2)^2(t+3-4) \quad (\because \text{サラスの方法で展開}) \\
&= (t-2)^2(t-1)
\end{aligned}
$$

となり、A の固有値は 2(重複度 2),1 である。

$m > 0$ に対して A^m を求めると

$$
A^m = \begin{pmatrix} -2 \cdot 2^m + 3 & 2 \cdot 2^m - 2 & 2 \cdot 2^m - 2 \\ 3 \cdot 2^m - 3 & -2^m + 2 & -2 \cdot 2^m + 2 \\ -6 \cdot 2^m + 6 & 4 \cdot 2^m - 4 & 5 \cdot 2^m - 4 \end{pmatrix}
$$

となる。

さて、A は正則であって

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2/3 & 2/3 & 1 \\ 3 & -2 & -3/2 \end{pmatrix}
$$

である。(※これも、試験ではちゃんと経過を書いてください) この $-m(>0)$ 乗を求めると上

の形と同じになり、また形式的に $m=0$ を代入すると I_3 となるから、結局

$$\boldsymbol{A^m} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-2\cdot 2^m+3} & \boldsymbol{2\cdot 2^m-2} & \boldsymbol{2\cdot 2^m-2} \\ \boldsymbol{3\cdot 2^m-3} & \boldsymbol{-2^m+2} & \boldsymbol{-2\cdot 2^m+2} \\ \boldsymbol{-6\cdot 2^m+6} & \boldsymbol{4\cdot 2^m-4} & \boldsymbol{5\cdot 2^m-4} \end{pmatrix} \quad (\forall \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z})$$

である。

3) こんどは、対角化できない場合です。今までの手は使えないので、こんどは予想して数学的帰納法でしょう。形が簡単なので予想しやすい。

解答

$$\boldsymbol{A^m} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{m} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2^m} \end{pmatrix} \quad (\forall \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z})$$

である。これを示す。

まず、$m=1$ のときこれは正しい。

次に、$m=k(>0)$ について正しいと仮定すると、

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix}$$

なので、$m=k+1$ についても正しい。以上で、$m>0$ については示された。

いま、A^m $(m>0)$ は正則であって、

$$(A^m)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -m & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-m} \end{pmatrix}$$

である（なぜなら、この行列と A^m との積が単位行列 I_3 になるから）。特に A^{-1} が存在して、$\underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{m\text{ 個}} \cdot A^m = I_3$ となる。従って、$(A^{-1})^m = (A^m)^{-1}$ なので、$m<0$ のときについても冒頭の式が示されたことになる。

さらに、冒頭の行列に形式的に $m=0$ を代入すると $A^0 = I_3$ となるから、これで全ての $m \in \mathbb{Z}$ について示された。

問 2

$(V,\ \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を n 次元計量実線型空間、$\mathcal{E}=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ を V の基底、X を $\mathcal{E}$ に関する内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の行列表示とする。つまり、$X=(\langle e_i,e_j\rangle)_{i,j}$ と定める。$\mathcal{F}=\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ を V の別の基底、A を $\mathcal{E}$ から $\mathcal{F}$ への基底の変換行列とするとき、基底 $\mathcal{F}$ に関する内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の行列表示を A と X を用いて表せ。

地道に成分計算しましょう。行列の掛け算で混乱しないように……。

解答

$A=(a_{ij})_{i,j}$ とすると、定義より

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

となる。すると、求める行列表示 Y の (i,j)-成分は、

$$\begin{aligned}
\langle f_i,f_j\rangle &= \left\langle \sum_{p=1}^{n} a_{pi}e_p,\ \sum_{q=1}^{n} a_{qj}e_q \right\rangle \\
&= \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} \langle e_p,e_q\rangle a_{qj}a_{pi} \\
&= \sum_{p=1}^{n} \{XA \text{ の } (p,j) \text{ 成分 }\}\cdot a_{pi} \\
&= \sum_{p=1}^{n} \{{}^t(XA) \text{ の } (j,p) \text{ 成分 }\}\cdot a_{pi} \\
&= {}^t(XA)\cdot A \text{ の } (j,i) \text{ 成分}
\end{aligned}$$

従って、

$$Y={}^t({}^t(XA)\cdot A)=\boldsymbol{{}^tAXA}$$

である。

問 4

1) A を n 次正則行列とする。このとき、適当な 1 変数多項式 f が存在して $A^{-1} = f(A)$ と表せることを示せ。ただし、$f(A)$ は問 3 のように定める。
2) A を n 次の、正則でない行列とする。このとき、適当な 0 でない 1 変数多項式 f が存在して、$f(A) = O_n$ （零行列）となることを示せ。

1) Caylay-Hamilton の定理をちょっと修正すれば分かります。

解答

Caylay-Hamilton の定理より、

$$\Phi_A(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$$

とおけば

$$\Phi_A(A) = O_n$$

である。いま $a_0 = \det A \neq 0$ であるから、$a'_i = \dfrac{a_i}{a_0}$ $(i = 0, \cdots, n)$ とすることにより

$$a'_n A^n + \cdots + a'_1 A + I_n = O_n$$

であり、変形すると

$$A(-a'_n A^{n-1} - \cdots - a'_2 A - a'_1 I_n) = I_n$$

となる。すなわち $f(t) = -a'_n t^{n-1} - \cdots - a'_2 t - a'_1$ と定めれば

$$A^{-1} = f(A)$$

となる。

2) A が正則でも正則でなくても、題意の行列は存在します。もちろん Caylat-Hamilton の定理より明らかですが、ここではこの定理を知らないとして答えておきます。

解答

(i, j)-成分のみ 1 でほかはすべて 0 であるような n 次正方行列 E_{ij} たちは、K-線型空間 $M_n(K)$ の基底をなす。(このことからも分かるように) $\dim M_n(K) = n^2$ なので、$M_n(K)$ の異なる元を $n^2 + 1$ 個持ってくればそれは一次従属である。

いま、$A^m = I_n$ なる自然数 m が存在したとすれば、逆行列 $A^{-1} = A^{m-1}$ が存在してしまい仮定に反する。従って $I_n, A, A^2, \cdots, A^{n^2}$ は全て異なる行列であって、さっき述べたことから一次従属である。すなわち、どれか少なくとも 1 つは 0 ではないような a_i $(i = 0, 1, \cdots, n^2)$ が存在して、

$$a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_{n^2} A^{n^2} = O_n$$

である。

問 5

次の文章は誤り「A が 2 次正方行列であって、$A^2 - 3A + 2I_2 = O_2$ であれば、$A = I_2$ または $A = 2I_2$」を証明しようとしているものである。誤りを指摘し、反例を挙げよ。

証明：$f(t) = t^2 - 3t + 2$ とすると、$A^2 - 3A + 2I_2 = O_2$ であるから $f(A) = O_2$ である。一方、$f(t) = (t-1)(t-2)$ であるから、$f(A) = (A - I_2)(A - 2I_2) = O_2$ である。従って、$A = I_2$ または $A = 2I_2$ である。□

高校生に出しても易しいと言われそうな問題です。

解答 一般に $B, C \in M_2(K)$ が $BC = O_2$ を満たすからといって $B = O_2$ または $C = O_2$ だとは限らない。たとえばこの証明の場合

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

とすれば $(A - I_2)(A - 2I_2) = O_2$ だが $A \neq I_2,\ A \neq 2I_2$ である。

問 6

9 つの正方行列

$$A_{(i)}=\begin{pmatrix} a_1^{(i)} & a_2^{(i)} & a_3^{(i)} \\ a_4^{(i)} & a_5^{(i)} & a_6^{(i)} \\ a_7^{(i)} & a_8^{(i)} & a_9^{(i)} \end{pmatrix} \quad (i=1,2,\cdots,9)$$

ただし $a_j^{(i)}=\begin{cases}1 & (j\le i)\\ 0 & (j>i)\end{cases}$, について対角化可能であるか否かを判定せよ。

一気に 9 つ判定することは（たぶん）できません。地道に判定しましょう。できるだけ楽をするように…

解答

- $i=1$ について
  $A_{(1)}$ は既に対角化されている。よって**対角化可能**である。
- $i=2,3$ について

$$\Phi_{A_{(i)}(t)}=\begin{vmatrix} t-1 & -1 & -a_3^{(i)} \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}=t^2(t-1)$$

  よって、$A_{(i)}$ の固有値は 0(重複度 2), 1 である。
  いま、一次方程式 $A_{(i)}v=0$ の一次独立な解は $3-\operatorname{rank}A_{(i)}=2$ 本取れる。これを v_0,v_0' とし、1 に対する固有ベクトルのひとつを v_1 とする。
  すると v_0,v_0',v_1 は一次独立であって、$A_{(i)}$ は行列 $\begin{pmatrix} v_0 & v_0' & v_1\end{pmatrix}$ によって対角化される。従って、**対角化可能**である。
- $i=4$ について

$$\Phi_{A_{(4)}(t)}=\begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ -1 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}=t(t^2-t-1)$$

  よって、$A_{(4)}$ の固有値は $0,\dfrac{1+\sqrt5}{2},\dfrac{1-\sqrt5}{2}$ である。従って、各固有値に対する固有ベクトル (必ず 1 つずつある）を v,v',v'' とすれば $A_{(4)}$ は行列 $\begin{pmatrix} v & v' & v''\end{pmatrix}$ で対角化される。よって**対角化可能**である。
- $i=5$ について

$$\Phi_{A_{(5)}(t)}=\begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ -1 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}=t^2(t-2)$$

  よって、$A_{(5)}$ の固有値は 0(重複度 2), 2 である。
  一次方程式 $A_{(5)}v=0$ の一次独立な解は $3-\operatorname{rank}A_{(5)}=1$ 本しかとれない。固有値 2 に対する固有ベクトルも 1 本しかないから、$A_{(5)}$ の一次独立な固有ベクトルは 2 本しか取れない。従って、**対角化は不可能**である。
- $i=6$ について

$$\Phi_{A_{(6)}(t)}=\begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ -1 & t-1 & -1 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}=t^2(t-2)$$

  よって、$A_{(6)}$ の固有値は 0(重複度 2), 2 である。
  従って、$A_{(6)}v=0$ の一次独立な解は $3-\operatorname{rank}A_{(6)}=2$ 本取れる。これを v_0,v_0' とする。固有値 2 に対する固有ベクトルを v_2 とすると v_0,v_0',v_2 は互いに一次独立なので $A_{(6)}$ は行列 $\begin{pmatrix} v_0 & v_0' & v_2\end{pmatrix}$ によって対角化される。従って、**対角化可能**である。
- $i=7$ について

$$\Phi_{A_{(7)}(t)}=\begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ -1 & t-1 & -1 \\ -1 & 0 & t \end{vmatrix}=t(t-1)^2$$

よって、$A_{(7)}$ の固有値は 0, 1(重複度 2) である。
いま $A_{(7)}v = v$ すなわち $(A_{(7)} - I_3)v = 0$ の一次独立な解は、$3 - \mathrm{rank}(a_{(7)} - I_3) = 1$ 本しかない。固有値 0 に対する固有ベクトルも 1 本しかないから、$A_{(7)}$ の一次独立な固有ベクトルは 2 本しか取れない。従って**対角化は不可能**である。

- $i = 8, 9$ について
  $A_{(8)}, A_{(9)}$ は対称行列だから、（直交行列で）**対角化可能**である。

補足ノート
実際に対角化する以外の、対角化可能／不可能の判定条件をまとめておきます。

- 対称行列は (直交行列で) 対角化可能
- ユニタリ行列は対角化可能
- 各固有値に対し、それに属す一次独立な固有ベクトルの数が固有値の重複度と一致すれば対角化可能
- それが、ひとつでも重複度に満たなければ対角化は不可能

問 7

2 行 2 列の実行列全体の作る $\mathbb{R}$ 上の線型空間を $M_2(\mathbb{R})$ とする。相異なる正の数 α, β, γ に対して $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ とおき、この P を用いて線型写像 $L : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ を

$$L(A) = PAP$$

で定義する。

1) L の固有値を求めよ。
2) L は対角化可能であることを示せ。

1) 計算が面倒。がんばってください。

解答

$M_2(\mathbb{R})$ の基底を

$$\mathcal{E} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

にとる。いま $A \in M_2(\mathbb{R})$ が、$\mathcal{E}$ に関し $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ と成分表示されるとき、$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ であるから、

$$\begin{aligned} L(A) &= PAP \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^2 x + \alpha\gamma y + \alpha\beta z + \beta\gamma w & \alpha\beta x + \beta^2 z \\ \alpha\gamma x + \gamma^2 y & \beta\gamma x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。従って、L の $\mathcal{E}$ に関する行列表示は

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\gamma & \alpha\beta & \beta\gamma \\ \alpha\beta & 0 & \beta^2 & 0 \\ \alpha\gamma & \gamma^2 & 0 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。すると

$$\begin{aligned} \Phi_A(t) &= \det(tI_4 - A) \\ &= \begin{vmatrix} t - \alpha^2 & -\alpha\gamma & -\alpha\beta & -\beta\gamma \\ -\alpha\beta & t & -\beta^2 & 0 \\ -\alpha\gamma & -\gamma^2 & t & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & t \end{vmatrix} \\ &= \beta\gamma \begin{vmatrix} -\alpha\gamma & -\alpha\beta & -\beta\gamma \\ t & -\beta^2 & 0 \\ -\gamma^2 & t & 0 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} t - \alpha^2 & -\alpha\gamma & -\alpha\beta \\ -\alpha\beta & t & -\beta^2 \\ -\alpha\gamma & -\gamma^2 & t \end{vmatrix} \quad (\because 4\text{ 行目について余因子展開}) \\ &= -\beta^2\gamma^2 \begin{vmatrix} t & -\beta^2 \\ -\gamma^2 & t \end{vmatrix} + t \left\{ (t - \alpha^2) \begin{vmatrix} t & -\beta^2 \\ -\gamma^2 & t \end{vmatrix} + \alpha\gamma \begin{vmatrix} -\alpha\beta & -\beta^2 \\ -\alpha\gamma & t \end{vmatrix} - \alpha\beta \begin{vmatrix} -\alpha\beta & t \\ -\alpha\gamma & -\gamma^2 \end{vmatrix} \right\} \\ &= \{t(t - \alpha^2) - \beta^2\gamma^2\}(t^2 - \beta^2\gamma^2) + t\{\alpha\gamma(-\alpha\beta t - \alpha\beta^2\gamma) - \alpha\beta(\alpha\beta\gamma^2 + \alpha\gamma t)\} \\ &= (t^2 - \alpha^2 t - \beta^2\gamma^2)(t + \beta\gamma)(t - \beta\gamma) - 2\alpha^2\beta\gamma t(t + \beta\gamma) \\ &= (t + \beta\gamma)\{(t^2 - \alpha^2 t - \beta^2\gamma^2)(t - \beta\gamma) - 2\alpha^2\beta\gamma t\} \\ &= (t + \beta\gamma)\{t^2 - (\alpha^2 + \beta\gamma)t^2 - \beta\gamma(\alpha^2 + \beta\gamma)t + \beta^3\gamma^3\} \\ &= (t + \beta\gamma)^2(t - \beta\gamma + \alpha)(t - \beta\gamma - \alpha) \end{aligned}$$

となるから固有値は、方程式 $\Phi_A(t) = 0$ を解いて、

$$\boldsymbol{-\beta\gamma}\textbf{(重複度 2)},\ \boldsymbol{\beta\gamma - \alpha},\ \boldsymbol{\beta\gamma + \alpha}$$

である。

2) A が対称行列や直交行列ならよかったのですが、残念ながらどちらでもありません。かといって対角化を正直に実行する必要もありません。

解答

固有値 $-\beta\gamma$ に対する固有空間の次元 d は、$4-\mathrm{rank}(A+\beta\gamma I_4)$ である。

$$A+\beta\gamma I_4=\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta\gamma & \alpha\gamma & \alpha\beta & \beta\gamma\\ \alpha\beta & \beta\gamma & \beta^2 & 0\\ \alpha\gamma & \gamma^2 & \beta\gamma & 0\\ \beta\gamma & 0 & 0 & \beta\gamma\end{pmatrix}\xrightarrow[3\text{ 行目}\times(1/\gamma),4\text{ 行目}\times(1/\beta\gamma)]{1\text{ 行目に}-(4\text{ 行目}),2\text{ 行目}\times(1/\beta),}\begin{pmatrix}\alpha^2 & \alpha\gamma & \alpha\beta & 0\\ \alpha & \gamma & \beta & 0\\ \alpha & \gamma & \beta & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2\text{ 行目},3\text{ 行目に}-(1\text{ 行目})]{1\text{ 行目}\times(1/\alpha)}\begin{pmatrix}\alpha^2 & \alpha\gamma & \alpha\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2\text{ 列目に}-\alpha\gamma(1\text{ 列目}),3\text{ 列目に}-\alpha\beta(1\text{ 列目})]{1\text{ 列目に}-(4\text{ 列目}),\text{ その後}\times(1/\alpha^2),}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

と基本変形できるから、$\mathrm{rank}(A+\beta\gamma I_4)=2$ であり、$Av=-\beta\gamma v$ の一次独立な解（$-\beta\gamma$ に対する固有ベクトル）は $4-2=2$ 個ある。これを v_1,v_2 とする。
一方、固有値 $\beta\gamma-\alpha,\ \beta\gamma+\alpha$ に対して、少なくともそれぞれ一つは固有ベクトルがある。これをそれぞれ v_3,v_4 とする。すると、v_1,v_2,v_3,v_4 は互いに一次独立なので、

$$P=\begin{pmatrix}v_1 & v_2 & v_3 & v_4\end{pmatrix}$$

で定まる P は正則であり、$P^{-1}AP$ は対角行列である。即ち、A は対角化可能である。
（証明終）

第 13 回（05/1/12）

問 1

次に示す行列が ($\mathbb{C}$ 上) 対角化可能であれば対角化し、そうでない場合は対角化不可能であることを示せ。

1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 \\ -12 & -5 & -12 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$

答案の書き方は第 11 回の問 1 (対角化できる場合) や第 12 回の問 6 (対角化できない場合) を参照してください。結論だけ書いておきます。

解答

問題の行列を A とする。また、$i = \sqrt{-1}$ とかく。

1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ として $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

2) 対角化不可能

3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ として $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

4) $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ として $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5) $P = \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ として $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

問 2

V を高々 2 次の $\mathbb{R}$ 係数の x の多項式のなすベクトル空間とする。即ち、

$$V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

とし、$f, g \in V$ に対して $f + g$ を多項式としての和、$f \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ に対して λf を実数と多項式の積として定める。このとき以下の問に答えよ。

1) $\{1, x, x^2\}$ は V の $\mathbb{R}$ 上の基底であることを示せ。
2) l_0, l_1, l_2 を実数とし、写像 $L : V \to V$ を $L(f) = l_0f + l_1\dfrac{df}{dx} + l_2\dfrac{d^2f}{dx^2}$ により定める。このとき、L を基底 $\{1, x, x^2\}$ に関して行列で表示せよ。
   ヒント：答えは l_0, l_1, l_2 を用いて表される 3×3 行列である。
3) $L(f) = \dfrac{df}{dx}$ であるとき、L の固有値を全て求め、それぞれの固有値に属する固有空間を求めよ。
   注意：必要であれば $\lambda \in \mathbb{R}$ の時、$\dfrac{df}{dx}(x) = f(x)$ の解は $f(x) = ce^{\lambda x}, c \in \mathbb{R}$ で与えられることを用いてもよいが、用いれば解答が易しくなるわけではは必ずしもない。
4) $f, g \in V$ に対して、$\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$ と置くと、これは V の内積を定めることを示せ。ただし、必要であれば次の事実を用いてよい。
   事実：g を x の多項式で、$g(x) \geq 0$ を任意の $0 \leq x \leq 1$ について満たすものとする。このとき $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx = 0$ であれば、g は多項式として 0 である。

以下の問 5)～10) に解答する際には、4) が解けていなくても $\langle\cdot, \cdot\rangle$ が内積であることを用いてよい。

5) $W = \{f \in V | f$ は高々 1 次の多項式 $\}$ と定めると、W は V の $\mathbb{R}$-部分線型空間であることを示せ。
6) W の基底であって、4) で定めた内積に関して正規直交系をなすものをひとつ（一組）挙げよ。
7) 4) で定めた内積に関する W の直交補空間 $W^\perp$ を求めよ。
   ヒント：$W^\perp$ は V の実 1 次元部分空間である。

ここで、実数 α に対して $\varphi_\alpha : V \to V$ を $\varphi_\alpha(f) = \alpha f$ で定める。ただし $f \in V$ とする。

8) φ_α が 4) で定めた内積に関して直交変換であるための α の必要十分条件を求めよ。
9) φ_α が 4) で定めた内積に関して対称変換であることを示せ。
10) φ_α の固有値は α のみであることを示し、その重複度（本によっては代数的重複度と呼んでいる場合もある）を求めよ。

1) 明らかです。

解答

$a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0 \Longleftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = 0$ なので、$\{1, x, x^2\}$ は一次独立である。
また、V の形から $\{1, x, x^2\}$ が V を生成することがわかる。
以上から、$\{1, x, x^2\}$ は V の $\mathbb{R}$ 上の基底である。

2) 行列表示の求め方の基本を押さえとけば楽勝。

解答

基底 $\{1, x, x^2\}$ の 3 つのベクトルにそれぞれ L を施してみると、

$$\begin{aligned} L(1) &= l_0 \cdot 1 \\ L(x) &= l_1 \cdot 1 + l_0 \cdot x \\ L(x^2) &= 2l_2 \cdot 1 + 2l_1 \cdot x + l_0 \cdot x^2 \end{aligned}$$

従って、L の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する行列表示は

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{l_0} & \boldsymbol{l_1} & \boldsymbol{2l_2} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{l_0} & \boldsymbol{2l_1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{l_0} \end{pmatrix}$$

である。

3) L の固有値とは、L の行列表示の固有値です。

解答

2) で $l_0 = l_2 = 0,\ l_1 = 1$ とすることにより、$L(f) = \dfrac{df}{dx}$ の行列表示は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

$$\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -2 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} = t^3$$

なので、**固有値は 0 のみ**であって、重複度は 3 である。

これに属す固有ベクトルは $L(f) = \dfrac{df}{dx} = 0$ を満たすので、定数関数のみである。従って、固有値 0 に属す固有空間は $\{\boldsymbol{a_0} \mid \boldsymbol{a_0} \in \mathbb{R}\}$

4) 内積であることの証明。第 10 回問 5 とほぼ同じなので、省略します。

5) 部分空間であることの証明は、確かめることが結構少ないです。ってか、夏学期の試験にありましたね。

解答

まず、和とスカラー倍について閉じていることを示す。

$$W = \{a_0 + a_1 x; a_0, a_i \in \mathbb{R}\}$$

なので、$f(x) = a_0 + a_1 x,\ g(x) = b_0 + b_1 x \in W$ とすると

$$(f+g)(x) = (a_0 + a_0')(x) = (a_0 + a_0') + (a_1 + a_1')x \in W$$

また、$\lambda \in \mathbb{R}$ に対し

$$(\lambda f)(x) = \lambda a_0 + (\lambda a_1)x \in W$$

以上から、W が和とスカラー倍について閉じていることは示された。

W に加法のゼロ元 $'0'$ が存在することは明らか。

また、$f(x) = a_0 + a_1 x \in W$ に対し $f'(x) = (-a_0) + (-a_1)x \in W$ と定めると

$$(f + f')(x) = 0$$

従って、任意の $f \in W$ には逆元 $-f = f'$ が存在する。

V が $\mathbb{R}$-線型なので、演算についてのほかの諸規則は満たされる。

以上より、W は V の $\mathbb{R}$-線型部分空間である。

6) 今回の試験範囲の大きな話題の一つ、Gram-Schmidt の正規直交化法です。

解答 W の基底 $\{e_1 = 1, e_2 = x\}$ を持ってきて、これに Gram-Schmidt の正規直交化法を施すことにする。

$f_1' = e_1 = 1$ とする。

$$||f_1'||^2 = \int_0^1 1 \cdot 1 dx = 1$$

より、$||f_1'|| = 1$ であって $f_1 = \dfrac{f_1'}{||f_1'||} = 1$ となる。こうすると

$$\langle e_2, f_1 \rangle = \int_0^1 x \cdot 1 dx = \frac{1}{2}$$

なので、

$$f_2' = e_2 - \langle e_2, f_1 \rangle f_1 = x - \frac{1}{2}$$

として、

$$||f_2'||^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{12}$$

より、$||f_2'|| = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ であって $f_2 = \dfrac{f_2'}{||f_2'||} = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}$ となる。

以上により、$\langle \cdot, \cdot, \rangle$ に関する W の正規直交基底 $\boldsymbol{\{1,\ 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}\}}$ を得る。

7) W の直交補空間 $W^\perp$ とは、W の元と直交するような V の元の集合 (線型空間) のことです。一般に $V = W \oplus W^\perp$ です。

解答 $V = W \oplus W^\perp$ なので、$\dim W^\perp = \dim V - \dim W = 1$ である。従って、一つでも $W^\perp$ の 0 でない元 f_0 が見つかれば、$W^\perp = \{af_0; a \in \mathbb{R}\}$ である。

いま、試しに $f_0 = 1 + a_1x + a_2x^2$ とおいて、条件を満たす元を探してみる (f_0 がこのような形でかけるとは限らないが、とりあえずこうかけると仮定する。もしもこれで矛盾が出れば、また考え直せばよい)。

f_0 は $1, x$ のいずれとも直交するから、

$$\langle f_0, 1 \rangle = \int_0^1 (1 + a_1x + a_2x^2) \cdot 1dx = 1 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 = 0$$
$$\langle f_0, x \rangle = \int_0^1 (1 + a_1x + a_2x^2) \cdot xdx = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 = 0$$

これを a_1, a_2 の連立方程式として解くと $a_1 = 6, a_2 = -12$ が得られる。従って、$f_0 = 1 + 6x - 12x^2$ である。これは定め方から全ての $f \in V$ と直交する。よって冒頭に述べたことから $\boldsymbol{W^\perp = \{a(1 + 6x - 12x^2); a \in \mathbb{R}\}}$ である。

8) 直交変換とは、$\langle \varphi(f), \varphi(g) \rangle = \langle f, g \rangle$ なる線型変換 φ をいいます。

解答 φ_α が直交変換であるための必要十分条件は、

$$\langle \varphi_\alpha(f), \varphi_\alpha(g) \rangle = \langle f, g \rangle$$

すなわち

$$\langle \alpha f, \alpha g \rangle = \langle f, g \rangle$$

すなわち

$$\alpha^2 \langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle$$

が成り立つこと。従って、求める必要十分条件は $\boldsymbol{\alpha = \pm 1}$ である。

9) 対称変換とは、$\langle\varphi(f), g\rangle = \langle f, \varphi(g)\rangle$ なる線型変換 φ をいいます。

解答

$$\langle\varphi_\alpha(f), g\rangle = \langle\alpha f, g\rangle = \alpha\langle f, g\rangle$$
$$\langle f, \varphi_\alpha(g)\rangle = \langle f, \alpha g\rangle = \alpha\langle f, g\rangle$$

であるから、$\langle\varphi_\alpha(f), g\rangle = \langle f, \varphi_\alpha(g)\rangle$ である。
従って φ_α は内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関して対称変換である。

10) 主張が正しいことは、φ_α の形からほぼ明らかです。もちろん、行列を介して考えても手間はかかりません。

解答

V の基底として $\{1, x, x^2\}$ がとれるが、

$$\varphi_\alpha(1) = \alpha\cdot 1$$
$$\varphi_\alpha(x) = \alpha\cdot x$$
$$\varphi_\alpha(x^2) = \alpha\cdot x^2$$

であるから、α は固有値の一つであって、$1, x, x^2$ はいずれもこれに属する固有ベクトルである。

従って、α に属する固有空間は $V_\alpha = \{a_0 + a_1x + a_2x^2; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = V$ であり、$\dim V_\alpha = 3$ であるから α 以外に固有値はなく、重複度は 3 である。

補足ノート

- 6) の別解 (Gram-Schmidt を使わない方法)
  まず $e_1 = 1$ とすれば $||e_1|| = 1$ である。
  次に、$e_2' = a_0 + a_1x \in W$ として、e_1 と e_2' が直交する条件は
  $$\langle e_1, e_2'\rangle = \int_0^1 1\cdot(a_0 + a_1x)dx = a_0 + \frac{1}{2}a_1 = 0$$
  すなわち $a_1 = -2a_0$ である。
  すると、$e_2' = a_0(1-2x)$ と書き直せる。今度は e_2' を正規化する。
  $$||e_2'||^2 = \int_0^1 a_0^2(1-2x)^2dx = a_0^2\frac{1}{3} = 1$$
  より (平方根は正負どちらを採用してもよいが) $a_0 = \sqrt{3}$ である。
  以上から、$\boldsymbol{\{1,\ \sqrt{3}(1-2x)\}}$ は W の正規直交基底の一つである。
- 10) の別解 (行列を用いる方法)
  φ_α を基底 $\{1, x, x^2\}$ に関して行列表示したものを A とすると
  $$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$
  となる。
  $$\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} t-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & t-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & t^\alpha \end{vmatrix} = (t-\alpha)^3$$
  なので、A の固有値は α のみであり、重複度は 3 である。

第 14 回（05/1/26）

問 4

$K=\mathbb{R}$ あるいは $K=\mathbb{C}$ とする。$X\in M_n(K)$ に対して、$\exp X$ あるいは $\exp(X)$ と書かれる $M_n(K)$ の元を

$$\begin{aligned}\exp X &= I_n + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}X^k\end{aligned}$$

として定める。ここで $0!=1,\ X^0=I_n$ と定める。上の級数が収束することは証明を要するが、ここではそれは認める。

1) $t\in\mathbb{R}$ を変数とみなし、$Y\in M_n(K)$ に対して（$X=tY$ として）$\exp(tY)$ を考える。

$$\frac{d}{dt}\exp(tY)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\frac{1}{k!}(tY)^k$$

が成り立つ、即ち $\exp(tY)$ は項別微分可能であることを用いて $\dfrac{d}{dt}\exp(tY)=Y\exp(tY)=(\exp(tY))Y$ が成り立つことを示せ。

2) $P\in \mathrm{GL}(n;K)$ のとき、$\exp(P^{-1}XP)=P^{-1}(\exp X)P$ であることを示せ。

3) 次の行列 X について、$\exp tX$ を計算せよ。

3-i) $X=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ 3-ii) $X=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ 3-iii) $X=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

4) $X,Y\in M_n(K)$ が $XY=YX$ を満たせば $\exp(X+Y)=\exp X\exp Y=\exp Y\exp X$ が成り立つことを示せ。本来は収束の問題は重要であるが、ここでは形式的な計算をすればよい。

5) $X\in M_n(K)$ のとき、$\det\exp X=e^{\operatorname{tr}X}$ であることを示せ（X の三角化あるいは Jordan 標準形を用いるのが簡単であろう）。

6) $X\in M_n(K)$ のとき、$\exp X$ は常に正則であって、その逆行列は $\exp(-X)$ で与えられることを示せ。

7) $\mathfrak{o}(n)=\{X\in M_n(\mathbb{R})\mid X+{}^tX=0\}$ とおく。$\mathfrak{o}(n)$ の元は歪対称行列と呼ばれる。$X\in\mathfrak{o}(n)$ のとき、$\exp X\in \mathrm{O}(n)$ であることを示せ。特に $n=2$ のとき、$\exp X$ を具体的に求めよ。

8) $\mathfrak{u}(n)=\{X\in M_n(\mathbb{C})\mid X+{}^t\overline{X}=0\}$ とおく。$\mathfrak{u}(n)$ の元は歪エルミート行列と呼ばれる。$X\in\mathfrak{u}(n)$ のとき、$\exp X\in \mathrm{U}(n)$ であることを示せ。

9) $Y\in M_n(K)$ とし、$P=\exp(tY)$ とおく。ただし $t\in\mathbb{R}$ である。ここで、$f:M_n(K)\to M_n(K)$ を $f(X)=PXP^{-1}$ と定める。f は t に依存するので、$f(X)$ を改めて $f(t,X)$ と書き直したとき、

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}f(t,X)\right|_{t=0}=XY-YX$$

であることを示せ。ちなみに、右辺は通常 $[X,Y]$ あるいは $\mathrm{ad}_X Y$ と表す。

1) 行列の微分は、各成分の微分です。

解答

$$\frac{d}{dt}\exp(tY) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{k!}(tY)^k = \frac{d}{dt}I_n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}kt^{k-1}Y^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}Y^k$$
$$= \sum_{k=0}\frac{1}{k!}t^kY^{k+1}$$
$$Y\exp(tY) = Y\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(tY)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^kY^{k+1}$$
$$(\exp(tY))Y = \left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(tY)^k\right\}Y = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}t^kY^{k+1}$$

以上から、$\frac{d}{dt}\exp(tY) = Y\exp(tY) = (\exp(tY))Y$ が成り立つ。

2) 簡単。

解答

$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}X^kP$ であるから、

$$\exp(P^{-1}AP) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(P^{-1}XP)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}P^{-1}X^kP = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}X^k\right)P$$
$$= P^{-1}(\exp X)P$$

これで示された。

3) スペース節約のため、exp に関わる部分以外は超略解とします。

3-i) X^k は簡単に予想できます。

解答

$X = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ において、$X^k = \begin{pmatrix}1 & k\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ である。従って、

$$\exp tX = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(tX)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\begin{pmatrix}t^k & t^kk\\ 0 & t^k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{k!}t^k\\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\boldsymbol{e^t} & \boldsymbol{te^t}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{e^t}\end{pmatrix}$$

3-ii) 対角化して X^k を求めます。

解答

$X = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ において、正則行列 $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ を用い $P^{-1}XP = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ と対角化できる。$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ である。さて、

$$P^{-1}(\exp tX)P = \exp(P^{-1}tXP) = \exp\left(t\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{k}\frac{1}{k!}t^k & 0\\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(3t)^k\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{3t}\end{pmatrix}$$

であるから、

$$\exp tX = P\begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{3t}\end{pmatrix}P$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e^t + e^{3t}} & \boldsymbol{-e^t + e^{3t}}\\ \boldsymbol{-e^t + e^{3t}} & \boldsymbol{e^t + e^{3t}}\end{pmatrix}$$

3-iii) X^3 以降は 0 なので、$\exp tX$ は有限和です。

解答

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ において、$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であり、$k \geq 3$ のとき $X^k = O_3$ である。

従って、

$$\exp tX = I_3 + tX + \frac{1}{2}t^2X^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{t} & \boldsymbol{t^2/2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

である。

4) 計算が少しややこしい。二項展開して係数に注目しましょう。

解答

$XY = YX$ であるから

$$\exp X \exp Y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}X^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}Y^l = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k!l!}X^kY^l$$

$$\exp Y \exp X = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}Y^l \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}X^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k!l!}Y^lX^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k!l!}X^kY^l$$

また、

$$\begin{aligned} \exp(X+Y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(X+Y)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{n!(m-n)!} X^nY^{m-n} \right) \end{aligned}$$

であり、X^kY^l の項は $(m,n) = (k+l,k)$ のときのみ現れるから、

$$\begin{aligned} \exp(X+Y) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(k+l)!} \cdot \frac{(k+l)!}{k!l!} X^kY^l \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k!l!} X^kY^l \end{aligned}$$

以上から、$\exp(X+Y) = \exp X \exp Y = \exp Y \exp X$ が成り立つ。

5) Jordan 標準形にしても結局三角行列の性質しか使いません。三角化で十分です。なお、対角化しても同じ議論ができそうな気がするかもしれませんが、どんな行列でも対角化できるわけではないのでそれでは不十分です。

解答

ある正則行列 P を用い、$P^{-1}XP = T$（T は三角行列）とすることができる。T の (i,i)-成分を a_i とすると、T^k の (i,i)-成分は a_i^k であって、T^k 自身三角行列である。

従って $\exp T = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}T^k$ の (i,i)-成分は $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}a_i^k = e^{a_i}$ であって、$\exp T$ も三角行列。

よって

$$\begin{aligned} \det \exp X &= \det \exp(PTP^{-1}) = \det(P(\exp T)P^{-1}) = \det \exp T \\ &= e^{a_1} \cdot e^{a_2} \cdot \cdots \cdot e^{a_n} = e_{a_1 + \cdots + a_n} = e^{\operatorname{tr} X} \end{aligned}$$

より、$\det \exp X = e^{\operatorname{tr} X}$ である。

6) これは楽でしょう。

解答

5) の結果より $\det \exp X = e^{\operatorname{tr} X} > 0$ であるから、$\exp X$ は常に正則である。

また、X と $-X$ は交換可能なので、4) の結果より

$$\exp X \exp(-X) = \exp(X - X) = \exp O_n = I_n$$

となり、$(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$ が得られる。