Re: 計算問題概略

Ｍｉｙａ－Ｎ*

目次

はじめに

夏学期にも計算問題概略がありましたが、その冬学期版です。夏学期に比べ、証明の比重が大きいと思われるので注意してください。そのための「番外編」もつけました (“計算”概略として番外なのであって、試験範囲としてはストライクど真ん中です)。

オリジナルの練習問題をつけました。この問題が解けるようになれば、良は確実だと思います。

広島弁の会話体で書いているので、非広島弁圏出身の方はがんばって読んでください。

---

* 「みやーん」と読みます。2004 年度入学理科 I 類 5 組

線型写像と行列

2.1 線型写像の行列表示

「夏学期に、線型写像と行列表示が 1 対 1 対応するゆーのやったん、覚えとる？」
『ん〜、何となく理解はしとるけど、ちゃんと説明せぇゆうのはちーといたしいかのぉ……」
「ほ〜ね、まぁ、たとえば $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線型写像

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x + 2y - z \\ 2x + z \\ x - 3y + 5z \end{pmatrix}$$

があったら、

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

じゃけぇ、f は

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

に対応するゆうことじゃくらいに思うとけばえぇよ」
『あぁそれなら分かるわ。ほいで？』
「ほいで、いまさりげなく $\mathbb{R}^3$ の任意の元の表し方として $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 使っとったけど、これは

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

ゆうことよね？」
『そりゃそうじゃね』
「で、

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

は、$\mathbb{R}^3$ の基底じゃったよね。ほいで $x,\ y,\ z$ はその各成分みたいに思ってえぇんよね？でも、$\mathbb{R}^3$ の基底ってこれだけじゃない思わん？たとえば $\mathbb{R}^3$ の任意の元を

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

ゆーて表してもえぇ思うんじゃけど」
『それは

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

を $\mathbb{R}^3$ の基底とみたって事じゃね？』
「そうそう、そういうことよ。まあともかく $\mathbb{R}^3$ の任意の元はこうやって一意に表せるけ、この x, y, z でもって $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ゆーて表してもえぇよね？ちなみにこういうのを“ $\mathcal{F}$ に関する成分表示 ”ゆうんよ。まあともかく、

ほいたらさっき線型写像と行列が 1 対 1 対応するゆうたけど、どれとどれが対応するかって基底のとり方によって変わるわいね？」
『ん〜、まぁほうじゃろうね。たちまちは分かったことにしとくわ』
「ほいで、$\mathbb{R}^3$ だけじゃのうて一般の線型空間 V, W の話にもどるで。V の任意の基底を $\mathcal{E} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ として、W の任意の基底を $\mathcal{F} = \{f_1, \cdots, f_m\}$ とする。ほいで f を V から W への線型変換とする。で $f(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \cdots + a_{mj}f_m \quad (j = 1, \cdots, n)$ とおくんよ。ほいで、$m \times n$ 行列 A を $A = (a_{ij})$ として、A を f の、基底 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ に関する行列表示いうんよ」
『あ〜、$f(e_j)$ を f_i の一次結合で表して、その係数をタテに並べるいうことじゃね？』
「えらい理解が早いねぇ…。まぁそういうことじゃね」
『…結局それさえわかっときゃ今までのとかいらんかったんじゃないん』
「…まぁほうじゃけどね」

2.2 練習問題

<<線型写像の行列表示>>

問 1.1$^\bigstar$ V, W を次のように与えられた線型空間とする。それぞれの線型写像 $f : V \to W$ に対し、与えられた V の基底 $\mathcal{E}$、W の基底 $\mathcal{F}$ に関する行列表示をそれぞれ求めよ。

(1) $V = W = \mathbb{R}^3$ で、$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ は $\mathbb{R}^3$ の標準基底

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

(2) V, W は高々 2 次の、t に関する $\mathbb{R}$-係数の多項式全体のなす線型空間で、$\mathcal{E} = \mathcal{F} = \{t^2, t, 1\}$

$$v \in V \text{ に対し } f(v) = v + \frac{dv}{dt} + \frac{d^2 v}{dt^2}$$

(3) V, W, f は (2) と同じで、$\mathcal{E} = \mathcal{F} = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$

(4) $V = M_2(\mathbb{C}),\ W = \mathbb{C}$ で、$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \right\},\ \mathcal{F} = \{1\}$

$$X \in V \text{ に対し } f(X) = \mathrm{tr} X$$

内積

3.1 内積とその行列表示

『内積ゆーたら、あれじゃろ、成分同士かけて足しゃーえー奴じゃろ』
「う〜ん、それも内積の一つじゃけど、これから考えるんはもっと一般的な奴なんよ。内積ゆーてもいろいろあるけぇ、下に一般の内積の計算規則まとめといたけぇね」

内積の性質（定義）

V を K-線型空間、$x, x', y, y' \in V, c \in K$ とし、$\langle \cdot, \cdot \rangle$ が内積なら

- $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$
- $\langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$
- $\langle cx, y \rangle = c\langle x, y \rangle$
- $\langle x, cy \rangle = \overline{c}\langle x, y \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

また、
$\langle x, x \rangle \geq 0$ であって $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

「計算規則ゆーたけど、これが内積の定義なんよ。じゃけ、なんか x, y に関する演算が与えられて、内積であることを示せゆーて言われたら上の性質を全部しめしゃーえぇゆーことじゃけぇね」
『$\overline{c}$ ゆーのは何？』
「c の共役複素数じゃわいね！そんなんも覚えちょらんのんね……」
『確認しただけじゃろーがいね！』
「まぁそうしといちゃるわいね。ほいで、内積の行列表示ゆーのがあるんじゃけどね」
『線型写像の行列表示みたいなもんなん？』
「ぜんぜん違うんよ。まあ、何もいたしげなこたなーんじゃけど……。V の基底が n 個あるとして、それぞれの基底の組み合わせに対して内積がわかりゃー V のどがな元に対しても内積が計算できるわいね？」
『何ゆーとるかよう分からんのじゃけど…』
「んー、たとえば、V の基底 $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ と V で定められた内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ があって、

$$\begin{aligned}&\langle e_1, e_1 \rangle,\ \langle e_1, e_2 \rangle (= \overline{\langle e_2, e_1 \rangle}),\ \langle e_1, e_3 \rangle (= \overline{\langle e_3, e_1 \rangle}),\\ &\langle e_2, e_2 \rangle,\ \langle e_3, e_2 \rangle (= \overline{\langle e_2, e_3 \rangle}),\ \langle e_3, e_3 \rangle\end{aligned}$$

がわかっとったら、

$$\begin{aligned}\langle e_1 + 2e_2 - 3e_3, -2e_1 - e_2 + e_3 \rangle = &-2\langle e_1, e_1 \rangle - \langle e_1, e_2 \rangle + \langle e_1, e_3 \rangle\\ &-4\langle e_2, e_1 \rangle - 2\langle e_2, e_2 \rangle + 2\langle e_2, e_3 \rangle\\ &+6\langle e_3, e_1 \rangle + 3\langle e_3, e_2 \rangle - 3\langle e_3, e_3 \rangle\end{aligned}$$

とかいうように、どがな 2 つの元に対する内積も計算できるじゃろ？」
『あー、確かにほじゃね〜』
「じゃけぇ、基底の組み合わせに対する内積の値の表をつくっとったらえぇ思わん？」
『まぁ、ほじゃねぇ』
「そういうのを、行列の形にして書いたら

$$\begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \cdots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \cdots & \langle e_2, e_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \langle e_n, e_2 \rangle & \cdots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

ゆー形になるわいね。これを、“ 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の、基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ に関する行列表示 ” ゆーんよ」
『なんじゃ、えらいみやすいのぉ』

3.2 Gram-Schmidt の正規直交化法

「さっき内積の行列表示やったわいね？そんとき、各基底の組み合わせの内積がわかりゃ全部の元の組み合わせの内積が計算できるゆうたの覚えとる？」
『覚えちょるわいね。さっき言われたばっかじゃん』
「まぁほうじゃけど……。で、まぁ確かに計算は出来るんじゃけど、やっぱめんどくさいと思わん？ 3 次の場合だって $3^2 = 9$ つの項に分かれるんじゃけぇ、もっと次数がたこうなったらもう実用的じゃないわいね」
『ほうじゃねぇ……。でもどうしようもないじゃん』
「まぁきーちょりんさいや。線型空間 V の基底を $\{e_1, \cdots, e_n\}$ としとくで。$\langle e_i, e_i\rangle = 1,\ \langle e_i, e_j\rangle = 0\ \ (i \neq j)$ になってくれたら計算しやすいわいね？内積がほとんど 0 じゃけぇどんな元の内積もさっきみたいに展開しても n 項しか出てこんよんなるし、その n 項も係数が 1 じゃけぶりみやすいじゃん。そういう基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ を正規直交基底いうんよ」
『いなげな言葉じゃのぉ……』
『“正規”いうんは同じ基底同士の内積が 1 になるいうことで、直交いうんが違う基底の内積が 0 になるいうことなんよ。普通の内積でも、内積が 0 のベクトルは直交するゆーじゃろ？あれと同じよ。ほいで、与えられた内積に対して正規直交基底を見つける方法いうんがちゃんとあるんよ。Gram-Schmidt の正規直交化法いうんじゃけどね」
『えらいこと考えるのぉ……』
「そういう人もおるよのぉ。その方法の解説今からするけぇね。ちょいややこしいけようきいとりんさいよ」
『はいはい』
「まず、ベースになる V の基底がいるんよ。まあ好きなように取ってくりゃえぇんじゃけど、たとえば一般的に $\{e_1, \cdots, e_n\}$ を取ってきたとするで」
『おぉ』
「ほいでまず $f_1' = e_1$ とおくんよ。ほいで $f_1 = \dfrac{f_1'}{||f_1'||}$ とおく」
『ちょい待ちんさいや、$||f_1'||$ てなんねぇ。見たことなぁで。』
「あ〜わりかったのう。$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ ゆーことよ。普通のベクトルの内積じゃったら、ベクトルの長さゆーことよね。これを x のノルムゆぅんよ。」
『ほうね、それ先言ってくれにゃぁ。で次は？』
「$f_2' = e_2 - \langle e_2, f_1\rangle f_1$ とおく。で、$f_2 = \dfrac{f_2'}{||f_2'||}$ とする」
『ほいで？』
「$f_3' = e_3 - \langle e_3, f_1\rangle f_1 - \langle e_3, f_2\rangle f_2$ とおく。ほいで $f_3 = \dfrac{f_3'}{||f_3'||}$ とする」
『分かってきたで。次は
$f_4' = e_4 - \langle e_4, f_1\rangle f_1 - \langle e_4, f_2\rangle f_2 - \langle e_4, f_3\rangle f_3$ とおいて、$f_4 = \dfrac{f_4'}{||f_4'||}$ とするんじゃろ？』
「ご名答。もう後は分かるじゃろ？そうやって f_n まで作れるわいね？ほいたら、$\{f_1, \cdots, f_n\}$ は $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関する V の正規直交基底になっとんよ」
『ほんまに？！結構みやすいんじゃないん？』
「確かにやり方聞くだけじゃみやすく聞こえるけど、実際やってみたら結構めんどいけぇ、よう練習しんさいよ」

3.3 QR 分解 (Gram-Schmidt 分解)

『QR 分解ゆーて、いなげなタイトルじゃねぇ……。QR て何の略なん？』

「行列 P を、2 つの行列 Q と R の積に分解するけぇ QR 分解いうだけらしいで。足助さんがいーおっちゃった」

『ほんまに？適当なネーミングじゃのぉ……』

「わかりやすぅてえぇじゃん。で、内容じゃけど、どんな正方行列 P も、ユニタリ行列 Q と上三角行列かつ対角成分が全部正である行列 R を使ぅて $P = QR$ ゆーて書けるんよ」

『ユニタリ行列ってなんねぇ。初めてきいたでぇ』

「あ〜、ゆぅてなかったかいのぉ。$Q \cdot Q^* = I_n$ を満たす正方行列 Q をユニタリ行列いうんよ。Q^* いうんは Q の複素共役の転置 ${}^t\overline{Q}$ のことじゃけぇね」

『ほうね』

「ほいで、その QR 分解って、Gram-Schmidt の正規直交化法で簡単にできるんよ」

『あんまり関係なさそうじゃけどねぇ…』

「それがおおありなんよ。まあ理論上の関係は説明せんけど、やり方だけ覚えときんさい」

『そうするわ…』

「まず、QR 分解したい行列 P を縦に割って、$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ とするんよ。ほいたら、基底 $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ に Gram-Schmidt の正規直交化法を施して、結果を $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ じゃとしたら $Q = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix}$ とするんよ」

『ちょい待ちんさいや。$\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ が基底じゃとは限らんじゃろーがいね。これが基底なら P は正則じゃないといけんで？』

「ありゃ、気付いたんね…」

『ごまかそうとしょーったん！』

「いや、正則じゃない場合はなんか説明がたいぎいけぇ……。まぁ講義では正則のときしかやっとらんけ、正則じゃー決め付けてたちまちは大丈夫よ」

『…まぁえぇことにしとくわ』

「そうしといてーや。ほいであと R じゃけど、Gram-Schmidt の正規直交化法の中身考えたら分かるじゃろうけど、$e_i = r'_{1i}p_1 + r'_{2i}p_2 + \cdots + r'_{ii}p_i$ ゆーて置けるわいね？ほいで $r'_{i+1,i} = \cdots = r'_{ni} = 0$ にしといて、$R' = (r'_{kl})_{k,l=1,\cdots,n}$ とするんよ。ほいたら $PR' = Q$ じゃけぇ $P = QR'^{-1}$ になって、$R = R'^{-1}$ ゆーて求められるけーね」

『そうとうめんどくない？ Gram-Schmidt するだけでたいぎいのに逆行列も求めるとか…』

「そう思うじゃろ？今のは講義でやりょーった方法なんじゃけど、R を求めるのはこうせんでもできるんよ」

『なんじゃ…。どうやりゃーえーん？』

「$p_i = r_{1i}e_1 + r_{2i}e_2 + \cdots + r_{ni}e_i$ ゆーて置きゃぇえんよ。Gram-Schmidt の正規直交化法しょーる途中にそのつどやりゃ簡単じゃわいね？ほいで $R = (r_{kl})$ と置きゃ $P = QR$ じゃろ？」

『ほうじゃね…。まぁしかし計算することがえっとあるのぉ…』

「まぁ、がんばりんさい」

3.4 練習問題

<<内積とその行列表示>>

問 1.1$^{\bigstar}$ 次のように線型空間 V 、その基底 $\mathcal{E}$、演算 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を定めるとき、それぞれについて (I) これが内積であることを示し、(II) 基底 $\mathcal{E}$ に対する行列表示を求めよ。

(1) $V=\mathbb{C}^3,\ \mathcal{E}=\left\{\begin{pmatrix}2i\\2\\i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2i\\-1\\-2i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3+i\\1\\2-i\end{pmatrix}\right\}$ とし、$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\in V$ に対し

$$\langle x,y\rangle=x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}+x_3\overline{y_3}$$

(2) $V=\{c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}+c_3e^{-3t}\mid c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}\},\ \mathcal{E}=\{e^{-t},e^{-2t},e^{-3t}\}$ として、$f,g\in V$ に対し

$$\langle f,g\rangle=\int_0^\infty f(t)g(t)dt$$

<< Gram-Schmidt の正規直交化法>>

問 2.1$^{\bigstar\bigstar}$ **問 1.1** の各内積について、与えられた基底 $\mathcal{E}$ に Gram-Schmidt の正規直交化法を施し正規直交基底を得よ。

問 2.2$^{\bigstar\bigstar\bigstar}$ 線型空間 V 内で内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が定義されている。V の基底 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ に以下の操作を施して n 本の元 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ を得たとする（Gram-Schmidt の正規直交化法）。

$$\begin{aligned}&f_1'=e_1\\&f_i'=e_i-\langle e_i,f_1\rangle f_1-\langle e_i,f_2\rangle f_2-\cdots-\langle e_i,f_{i-1}\rangle f_{i-1}\quad(i=2,\cdots,n)\\&f_i=\frac{f_i'}{||f_i'||}\quad(i=1,...,n)\end{aligned}$$

$\{f_1,\cdots,f_n\}$ は V の $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関する正規直交基底であることを示せ。

問 2.3$^{\bigstar}$ 有限次元線型空間 V 内で定義された内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関する正規直交基底 $\mathcal{E}$ がある。内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の、基底 $\mathcal{E}$ に関する行列表示を求めよ。

問 2.4$^{\bigstar\bigstar}$ 線型空間 K^n 内で定義された内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関する正規直交基底を一つとり、$\{e_1,\cdots,e_n\}$ とする。n 次正方行列

$$E=\begin{pmatrix}e_1&e_2&\cdots&e_n\end{pmatrix}$$

はユニタリ行列であることを示せ。すなわち、$E\cdot{}^t\overline{E}=I_n$ であることを示せ。

<< QR 分解 (Gram-Schmidt 分解) >>

問 3.1 次の各正則行列 P を QR 分解せよ。すなわち、$P=QR$ なるユニタリ行列 Q と対角成分が全て正であるような上三角行列 R の組を求めよ。

(3) $\begin{pmatrix}1&1&2&5\\1&-2&1&0\\0&3&1&-1\\-1&-4&0&-4\end{pmatrix}$

固有値・対角化

4.1 固有値・固有ベクトル・固有空間

「今回は、正方行列の固有値とか固有ベクトルとかの求め方やるけぇね。用語が割とでてくるし、対角化の基礎じゃけぇしっかりやってぇよ」
『善処します…』
「固有値が何かいうんはおいといて、まず求め方教えるけぇ。まず、n 次正方行列 A に対して $\Phi_A(t) = \det(tI_n - A)$ を A の固有多項式いうんよ」
『あんさ、いやな予感がすんじゃけど…』
「どしたん」
『行列式の計算思いださにゃいけんってこと？』
「ご明察。それに、今度は行列式が t の多項式じゃけぇ、ばりいたしゅうなるけぇね」
『やばいわ…』
「よう復習しときんさいよ。ほいで、$\Phi_A(t) = 0$ の解が A の固有値じゃけぇ」
『おっ？意外と固有値がでてくんの早かったね』
「まぁの。口で言うと早いんじゃけど、結構やってみると大変で。ほいで、重解が出てくることがあるわいね？たとえば 3 重解じゃったら、その固有値の重複度は 3 、いう言い方するけぇね」
『まぁそれは分かるわ』
「じゃろうね。ほいで、たとえば α が A の固有値の一つじゃったら、一次方程式 $(A - \alpha I_n)v = 0$ の解全体の空間を固有空間っていうんよ」
『あんさ、またいやな予感がすんじゃけど…。一次方程式の解きかたも思いださにゃいけんってこと？』
「またまたご明察！」
『うれしゅうなぁ…』
「まぁ気づいたんじゃけそう言わんと。そこもよう復習しとってね。ほいで、固有空間の基底をなすベクトルの組がそれぞれ固有ベクトルじゃけぇ。まぁ、一次方程式を解くときは、固有空間より先に固有ベクトルが求まることになるわいね」
『ん、分かったような分からんような…』
「ま、問題解きゃ慣れるわいね。ほいで、一応固有値がなんかっていう説明しとくわ。$Av = \alpha v$ いうような (α, v) の組があったら、α が固有値、v がそれに属す固有ベクトルなんよ。まぁそれだけのことなんじゃけどね。で、もう一ついわにゃいけんのんじゃけど、行列と写像の対応がつくいう話したじゃん。写像の固有値・固有ベクトルいうんもあって、それは写像に対応する行列の固有値・固有ベクトルいうことなんよ」
『頭が疲れる…』

4.2 対角化

「正方行列 A の固有値と固有ベクトルは求まるようになったわいね？こんどは、それつこうて対角化いうんやるけぇね」
『それ、楽なん？』
「固有値と固有ベクトルがもとまりゃ楽で。まぁ、それを求めるまでがたいぎいんじゃけど…」
『ほうね…。で、どうやるん？ってか、対角化がどがなんか自体わからんのじゃけど…』
「まぁ、とにかくやってみりゃ分かるわいね。まず、 A の固有値と固有ベクトルを求めるんよ。ほいで、各固有値の重複度と、その固有値に属する固有空間の次元を比べる。もし固有空間の次元が低かったら、対角化はできんけぇね」
『でも、できん問題は出んじゃろ？』
「それが、“ 対角化できるなら対角化して、できないならそれを示せ ” ゆーて出されるらしいで。じゃけぇ、そういう場合も勉強しとかにゃ」
『ほうじゃね…』
「まぁ、できん場合はそれだけじゃけ、できる場合に実際やってみようや。って言ってもあんまやることないけど…。まず固有値を全部対角線上に並べたような対角行列を作りんさい。重複度が 2 以上じゃったら、ちゃんと重複度の回数分並べるんで」
『あの、聞くのが怖いんじゃけど…』
「どしたん？」
『対角行列って何？』
「…」
『…基本？』
「当たり前じゃんね…。対角行列いうんは、対角成分、つまり左上から右下への対角線の成分だけがあって、あとは 0 になっとる行列よーね。対角線上が 0 になっとってもえぇけぇね」
『分かった。で、対角行列を作ったらどうすん？』
「作ったら、固有値の並び順に、その固有値に属する固有ベクトルを並べんさい。重複度が 2 以上じゃったら、一次独立になるように並べるんよ。ほいたら正方行列ができるじゃろ？」
『うん』
「ほいで、その正方行列を P としたら、P は作り方から正則なんよ」
『作り方からとか、そんなこといわれても…』
「…まぁ、分からんけりゃ “ 作り方から正則 ” とかそのまま答案に書いときゃえぇわいね。説明すんのもたいぎいし…。ほいで、$P^{-1}AP$ が、さっきつくった対角行列になるんよ。ほいで、こういう操作を “ A を変換行列 P によって対角化する ” ゆーんよ」
『あ、じゃぁ固有値と固有ベクトルがわかりゃほんまに楽じゃね。固有値と固有ベクトルただ並べりゃえぇだけじゃけぇ…』
「じゃろ？」

4.3 行列の整数乗

「これは簡単なんじゃけどね。高校でやった考えとほとんど同じじゃけぇ別に改めて言わんでもえぇじゃろうけど」
『まぁサービスじゃ思うておそえてくれぇや』
「対角化できるもんは対角化するよ。ほいたら $P^{-1}AP$ が対角行列になるけ、$(P^{-1}AP)^m = P^{-1}A^mP$ は簡単に分かるじゃろ。ほいたら左から P 掛けて、右から P^{-1} かけりゃえぇんよ」
『それは $m > 0$ の時よね？ $m = 0$ んときと $m < 0$ んときは？」
「$m = 0$ のときは $A^m = I_n$ で、$m < 0$ のときは $A^m = (A^{-1})^m$ なんよ。でも、$m \leq 0$ んときは A^m は A が正則じゃないと定義されんけぇね。ほいで実は、$m \leq 0$ でも A^m が定義されるなら、$m \leq 0$ んときも $m > 0$ んときも A^m の形は一緒になるんよ。じゃけどこれは講義でやっとらんことじゃけ、試験で出たら答案では確かめにゃいけんと思うけど…」
『ほうね…』
「うん。たいぎいけどまぁしょうがないじゃろ。で、対角化できんかったら、予想して帰納法しかないじゃろうね」
『ほうなんね…』
「ほうじゃね」
『…終わり？』
「…うん」

4.4 練習問題

＜＜固有値・固有ベクトル・固有空間＞＞

問 1.1**　次の各行列の固有値を求めよ。また、各固有値に属する固有ベクトルと固有空間を求めよ。但し、与えられた行列が全ての固有値が実数であるような実行列ならば、固有空間は実線型空間とする。

(1) $\begin{pmatrix} -4 & 15 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -1+2\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \\ 2+2\sqrt{-1} & 2-\sqrt{-1} \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 12 \\ -9 & -11 & -18 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} -10 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 82 & -35 & 13 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} -9 & -17 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

＜＜対角化＞＞

問 2.1*　**問 1.1** の各行列に対し、対角化できるものについては対角化し、変換行列 P と対角行列を求めよ。対角化できないものについてはそのことを示せ。

＜＜行列の整数乗＞＞

問 3.1*　**問 1.1** の行列のうち対角化できるものについて、$A^m \quad (m \in \mathbb{N})$ を求めよ。

二次形式

5.1　符号と標準形

「二次形式ゆーんがあってね。$f(x,y)=x^2+2y^2+2xy$ とか、$g(x,y,z)=x^2+3y^2-2z^2+4xy+2yz-4zx$ とか、とにかくいくつかの変数の二次の項の和で表されとる多項式を " 二次形式 " いうんよ」

『ほいで？』

「これを平方完成してみるんよ。但し、項の数が変数の数を超えちゃいけんけぇね。たとえば、さっきの例なら $f(x,y)=(x+y)^2+y^2$ じゃし、$g(x,y,z)=(x+2y-2z)^2-(y-5z)^2+19z^2$ ゆーてできるじゃろ」

『まぁそりゃそうじゃけど…。じゃけどしたん、って感じじゃね』

「お前、じゃけどしたんばっかじゃのぉ…」

『そう思うんじゃけぇしょうがなかろぅが。ほいで、次はどうすんね』

「ほいで、f についてなら $P=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ とおいて $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$、$g$ についてなら $P=\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&1&-5\\0&0&\sqrt{19}\end{pmatrix}$ とおいて $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とすりゃ $f=X^2+Y^2,\quad g=X^2-Y^2+Z^2$ じゃんね？」

『ほうよ？』

「ほいで、このとき f の符号は $(2,0)$ 、g の符号は $(2,1)$ じゃゆーてゆーんよ」

『え？どがにして決めたんね、それ？』

「$(\{$ プラスされとる $()^2$の数 $\},\{$ マイナスされとる $()^2$の数 $\})$ ゆーことよ」

『あー、そういうことね』

「ほいで、プラスされとるやつだけ前に集めて、$f=X^2+Y^2$ とか $g=X^2+Z^2-Y^2$ ゆーて書いたやつを、標準形いうんよ」

『ぶりみやすいね』

「ほんまに？」

『だって結局平方完成するだけじゃん』

「じゃぁ、$h(x,y)=4xy$ を平方完成してみんさいや」

『おう。分かったわいね。　…って、こんなんできるわけないじゃんね！そもそも 2 乗の項がないんじゃけぇ…』

「ほれ見てみぃやできんじゃろうが…。でも結局平方式の和と差にすりゃえぇんじゃけぇ、こういうときは $h(x,y)=(x+y)^2-(x-y)^2$ とするんよ」

『あ〜、なるほど、ほいならできるのぉ。符号は $(1,1)$ いうことじゃね』

「そういうことじゃね。普通の平方完成とこのテクニックさえやりゃどんなんでも平方完成できるけぇね。ほいじゃぁ最後にヒッカケ出すで。$f(x,y,z)=4xy+4yz$ の符号を求めてみんさい」

『そがなん、はぁ楽勝じゃわいね！今の使やえぇんじゃろ？ $f(x,y,z)=(x+y)^2-(x-y)^2+(y+z)^2-(y-z)^2$ じゃけぇ、符号は $(2,2)$ じゃろ？』

「はい引っかかった」

『……。　お前たいぎいやっちゃのぉ…。どこがちごうとんね』

「$()^2$ の項数は変数の数を超えちゃいけんゆーたろーが！ $f(x,y,z)=2(x+y+z)^2-2(x+y)^2-2z^2$ じゃけ、符号は $(1,2)$ なんよ。だいたい、これなら $P=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}&\sqrt{2}\\0&\sqrt{2}&\sqrt{2}\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}$ とおいて $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とすりゃ $f=X^2-Y^2-Z^2$ ゆーて標準形も求められるけど」

『あ〜分かった！俺みたくやったらそういう P がつくれんのんじゃろ？正方行列にならんっていうか…』

「そういうことよ」

5.2 行列との対応・符号と固有値の関係

『ようやく最後じゃ…。長かったのぉ…』
「最後は重いで」
『…マジで？』
「実はあんま重ない」
『てめぇ…』
「ていうか試験に出るんか分からんのんじゃけどね…。余裕がなかったらやらんでもえぇよ」
『ん〜、じゃぁ俺、構造化学とか電磁気とかやばいけぇそっちやるわ』
「でも、タテマエ上お前はこれを勉強せぇ」
『タテマエ上って…』
「まぁえぇじゃん。一般の n-変数の二次形式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が与えられたとき、$f = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$ とおくで」
『無理やり始めなや…。はぶてちゃるけぇのぉ』
「かわゆーなーんじゃけぇやめーや…。話戻るけど x_ix_j の係数と x_jx_i の係数って区別つかんじゃろ？じゃけぇ、$a_{ij} = a_{ji}$ で定義するで。ほいたら、対称行列 $A = (a_{ij})$ と二次形式 f の対応がつくじゃろ」
『まぁねぇ…』
「今度は A の固有値を求めてみて、正の固有値が重複度込みで p 個、負の固有値が重複度込みで q 個じゃったら、実は f の符号は (p, q) なんよ」
『…まじで？』
「すげぇ思うたじゃろ？」
『成り立ったけどしたんとも思ったけどすげぇとも思った』
「かわゆーないのぉ…。まぁえぇわ。実は今回はこれで終わりじゃけぇね」
『やった！ようやく範囲が終わったか…』
「まぁ、2 年以降も数学は準必っぽく続くらしいけどね」
『まぁ、今は目先だけ見て喜ぶことにするわ』
「目先の構造化学と電磁気やらんでえぇん」
『…やってきます』

5.3 練習問題

<<符号と標準形>>

問 1.1* 次の二次形式 f の符号をそれぞれ求めよ。

(1) $f(x,y) = x^2 + 2xy$
(2) $f(x,y,z) = x^2 - 3y^2 + 2xy + 4xz + 12yz$
(3) $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 3yz$
(4) $f(x,y,z,w) = x^2 + 3y^2 + z^2 - 3w^2 + 2xy - 4xw - 4yz - 2yw$
(5) $f(x,y,z,w) = y^2 + z^2 + w^2 + 2xy + 2yz + 2zw + 2yw$

<<行列との対応・符号と固有値の関係>>

問 2.1* **問 1.1** に挙げられた二次形式の係数行列（係数を定める対称行列）をそれぞれ求めよ。

問 2.2** n-変数の二次形式の係数行列は、重複度を含めるとかならず n 個の実固有値を持つことを簡潔に説明せよ。

問 2.3** **問 1.1** の (1),(3),(5) の二次形式について、正／負の固有値の個数を調べ、**問 1.1** で求めた符号と見比べよ (勿論、(2),(4) についても余裕があれば実行すればよい。他の 3 問に比べ計算が少しだけ煩雑である)。

番外編・いろいろな変換と行列

特殊な変換や行列の定義のまとめ。これを使う証明はたぶん出ます。そういった証明は定義を押さえとけば超簡単です。

以下で、V は K-線型空間、f は V から V への線型変換、v_1, v_2 は V の任意の元。

随伴

行列 A の随伴行列は、$A^* = {}^t\overline{A}$

f^* が f の随伴変換 $\iff \langle f^*(v_1), v_2\rangle = \langle v_1, f(v_2)\rangle$

ユニタリ＆直交

- $K = \mathbb{C}$ のとき（ユニタリ）
  行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ がユニタリ行列 $\iff A \cdot A^* = A^* \cdot A = I_n$
  ($\iff$ A に対応する変換 f がユニタリ変換)
  変換 f がユニタリ変換 $\iff \langle f(v_1), f(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$
  ($\iff$ f に対応する行列 A がユニタリ行列)
- $K = \mathbb{R}$ のとき（直交）
  行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ が直交行列 $\iff A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A = I_n$
  ($\iff$ A に対応する変換 f が直交変換)
  変換 f が直交変換 $\iff \langle f(v_1), f(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$
  ($\iff$ f に対応する行列 A が直交行列)

以下、行列と変換の対応についての記述（上のカッコ内）は省略。もちろん同様のことは成り立っている。

エルミート＆対称

- $K = \mathbb{C}$ のとき（エルミート）
  行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ がエルミート行列 $\iff A = A^*$
  変換 f がエルミート変換 $\iff f = f^* \iff \langle f(v_1), v_2\rangle = \langle v_1, f(v_2)\rangle$
- $K = \mathbb{R}$ のとき（対称）
  行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ が対称行列 $\iff A = {}^tA$
  変換 f が対称変換 $\iff f = f^* \iff \langle f(v_1), v_2\rangle = \langle v_1, f(v_2)\rangle$

正規

行列 A が正規 $\iff A \cdot A^* = A^* \cdot A$

変換 f が正規 $\iff f \circ f^* = f^* \cdot f$

練習問題略解

※ちゃんとした答案の書き方は「演習問題の解答と解説」を参照してください。

線型写像と行列

問 1.1

$$(1)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\qquad(2)\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad(3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}\qquad(4)\begin{pmatrix}1-i&0&0&1+i\end{pmatrix}$$

内積

問 1.1　(I) 省略　(II) 以下の通り

$$(1)\begin{pmatrix}9&0&3+8i\\0&9&3+2i\\3-8i&3-2i&16\end{pmatrix},\quad(2)\begin{pmatrix}1/2&1/3&1/4\\1/3&1/4&1/5\\1/4&1/5&1/6\end{pmatrix}$$

問 2.1

$$(1)\left\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2i\\2\\i\end{pmatrix},\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2i\\-1\\-2i\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{322}}\begin{pmatrix}7-3i\\6+14i\\14-6i\end{pmatrix}\right\},\quad(2)\left\{\sqrt{2}e^{-t},\ -4e^{-t}+6e^{-2t},\ \sqrt{\frac{3}{11}}(11e^{-t}-24e^{-2t}+10^{-3t})\right\}$$

問 2.2　「正規」の部分は第 3 式より分かる。「直交」の部分は帰納的に示す。$\langle f_i, f_j\rangle$ の f_i に第 2 式を代入してみればよい。

問 2.3　$(\dim V)$-次単位行列 $I_{\dim V}$

問 2.4　$E\cdot E^*$ の (i,j)-成分は $\langle e_i, e_j\rangle$ だから、**問 2.3** より命題が従う。

問 3.1

$$(3)\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&-1&0&-1\\0&1&1&-1\\-1&-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&3&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

固有値・対角化

問 1.1　固有ベクトルは、各固有値に属する固有空間の基底になっていれば下記と異なっても可。

(1)　固有値 1, 固有ベクトル $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, 固有空間 $\left\{\alpha\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix};\alpha\in\mathbb{R}\right\}$;

固有値 2, 固有ベクトル $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$, 固有空間 $\left\{\alpha\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix};\alpha\in\mathbb{R}\right\}$

(2)　固有値 1, 固有ベクトル $\begin{pmatrix}\sqrt{-1}\\2\end{pmatrix}$, 固有空間 $\left\{\alpha\begin{pmatrix}\sqrt{-1}\\2\end{pmatrix};\alpha\in\mathbb{C}\right\}$;

固有値$\sqrt{-1}$, 固有ベクトル $\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{-1}\end{pmatrix}$, 固有空間 $\left\{\alpha\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{-1}\end{pmatrix};\alpha\in\mathbb{C}\right\}$

(3)　固有値 1, 固有ベクトル $\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$, 固有空間 $\left\{\alpha\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix};\alpha\in\mathbb{R}\right\}$;

固有値 -2, 固有ベクトル $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$, 固有空間 $\left\{\alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix};\alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$

(4)　固有値 0, 固有ベクトル $\begin{pmatrix}5\\8\\10\end{pmatrix}$, 固有空間 $\left\{\alpha\begin{pmatrix}5\\8\\10\end{pmatrix};\alpha\in\mathbb{R}\right\}$;

固有値 1, 固有ベクトル $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, 固有空間 $\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix};\alpha\in\mathbb{R}\right\}$;

固有値 2, 固有ベクトル $\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$, 固有空間 $\left\{\alpha\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix};\alpha\in\mathbb{R}\right\}$

(5)　固有値 1, 固有ベクトル $\begin{pmatrix}-5\\2\\2\end{pmatrix}$, 固有空間 $\left\{\alpha\begin{pmatrix}-5\\2\\2\end{pmatrix};\alpha\in\mathbb{R}\right\}$;

固有値 -1, 固有ベクトル $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, 固有空間 $\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};\alpha\in\mathbb{R}\right\}$

問 2.1　変換行列 P のとり方や、対角行列の対角成分の並べ方は一意的ではないので注意してください。

(1)　$P=\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix},\ P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$　　(2)　$P=\begin{pmatrix}\sqrt{-1}&-1\\2&\sqrt{-1}\end{pmatrix},\ P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&\sqrt{-1}\end{pmatrix}$

(3)　$P=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-3&1&-3\\1&0&1\end{pmatrix},\ P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$

(4)　$P=\begin{pmatrix}5&1&2\\8&2&5\\-10&-1&1\end{pmatrix},\ P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

(5) は、固有値 1 の重複度が 2 であるのに、固有値 1 に属する固有空間の次元は 1 である。従って、対角化不可能。

問 3.1

(1)　$\begin{pmatrix}-5\cdot2^m+6&15\cdot2^m-15\\-2\cdot2^m+2&6\cdot2^m-5\end{pmatrix}$　　(2)　$\begin{pmatrix}2\cdot\sqrt{-1}^m-1&-\sqrt{-1}^m+\sqrt{-1}\\-2\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}^m+2\sqrt{-1}&-\sqrt{-1}^m+2\end{pmatrix}$

(3)　$\begin{pmatrix}-(-2)^m+2&-2(-2)^m+2&-4(-2)^m+4\\3(-2)^m-3&4(-2)^m-3&6(-2)^m-6\\-(-2)^m+1&-(-2)^m+1&-(-2)^m+2\end{pmatrix}$

(4)　$\begin{pmatrix}24\cdot2^m-58&-10\cdot2^m+25&4\cdot2^m-9\\60\cdot2^m-116&-25\cdot2^m+50&10\cdot2^m-18\\12\cdot2^m+58&-5\cdot2^m-25&2\cdot2^m+9\end{pmatrix}$

二次形式

問 1.1　(1) (1,1)　(2) (1,1)　(3) (2,1)　(4) (2,2)　(5) (2,1)

問 2.1

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 6 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3/2 \\ -1 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad (5)\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

問 2.2　係数行列 $A = (a_{ij})$ において、$a_{ij} = a_{ji}$ と定めたから、A は実対称行列である。実対称行列は実行列で対角化できたのであった。そのためには実数の固有値が n 個あることが必要である。

問 2.3　詳しい計算は省略。固有方程式の解の正負だけがわかればよいので、実際に解くのが困難なときは増減を調べるなどするとよい（(5) のチェックにはこれが必要だろう)。