

物理学 A(力学)

牧島一夫

2001 年夏学期

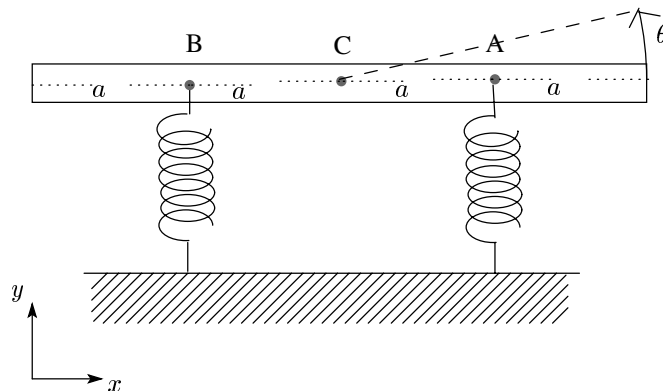
[受験した感想]

非常にいい講義でした。問題も良心的できちんとわかっていたら解ける問題です。しっかりと試験勉強をしてのぞんでください。

第 1 問 地球を、質量 M で半径 R の、完全な球体と近似する。以下の小問に答えよ。

- (1) 重力 (万有引力) 定数を G とし、地表での重力加速度 g を M, R, G で表せ。
- (2) 地表すれすれに回る人工衛星の周期は約 1.4 時間である (大気の摩擦は無視する)。これは、遠心力による加速度が g に等しい状態と言える。地球の自転による赤道上での遠心力の加速度を α とするとき、比 α/g の値を適当な有効数字で概算せよ。
- (3) 赤道上での単振動の周期は、同じ単振子を同じ条件で、北極で振らせたときの周期に比べ、どのくらい長い (もしくは短い) か、小問 (2) を利用して概算せよ。
- (4) 現実的な単振子の場合、同一の地点で降らせても、振らせ方や環境条件によって、その周期は微妙に変化する。周期に影響を及ぼす要因 (1 つとは限らない) を、考え付く範囲で列挙せよ。

第 2 問 図のように、長さ $4a$ で質量 M の一様な剛体の棒が 2 点 A, B で、いずれもバネ定数 k のバネで支えられている。つりあいの位置を原点とした、A 点と B 点の y 座標をそれぞれ y_A, y_B とする。重力や、棒の x 方向の運動は無視して、以下の小問に答えよ。



- (1) 棒の重心 C の y 座標を Y とするとき、 Y に関する運動方程式を求めよ。答えの式に y_A や y_B を残さないこと。
- (2) (x, y) 平面内における重心周りの棒の回転角度 (反時計回りを正) を θ とする。 $|\theta| \ll 1$ のとき、 θ を y_A, y_B を用いて表せ。また θ に関する運動方程式を求めよ。この棒の重心周りの慣性モーメントは $I = \frac{4}{3}Ma^2$ であることを用いてよい。

- (3) 以上の結果からこの棒の y 方向の微小な運動の様子を 150 字程度で記述せよ。ただしキーワードとして、「固有モード」「対称」「反対称」「周期」「重ね合わせ」「初期条件」「うなり」の 7 語をすべて、すくなくとも 1 回は用いること。

第 3 問 極座標 (r, θ) で表される 2 次元の平面に、中心力ポテンシャル $U(r)$ があり、その中に質量 m の質点が置かれている。その運動につき、下の問に答えよ。

- (1) 質点の運動方程式の r 成分は、ある物理量 A を用いて、 $m(\frac{d^2 r}{dt^2} - A) = -\frac{dU}{dr}$ と書かれる。 A の物理的な意味を述べよ。また次元を考慮することにより A の形として正しいものを、
 (ア) $r\dot{\theta}^2$, (イ) $(r\dot{\theta})^2$, (ウ) $r^2\dot{\theta}$, (エ) $\frac{d^2\theta}{dt^2}$
 の中から選べ。
- (2) 運動方程式の θ 成分は $m\frac{dh}{dt} = 0$ と書かれる。ここに h は面積速度、 $L = mh$ は角運動量である。 h の形として正しいものを、先の場合と同様に小問 (1) の (ア)~(エ) から選んで答えよ。
- (3) 質点の運動エネルギーは $K = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + B)$ で与えられる。 B の形として適するものを、小問 (1) の (ア)~(エ) から選び答えよ。またそれを用いて力学的エネルギー E の保存の式を書き下せ。

以下では特別な場合として、質点が極座標の原点に、バネ定数 k の軽いバネで結ばれている場合を考える。バネの自然長は 0 と考えてよい。このときは講義でやったように、質点の軌道は一般に、原点を中心とする楕円になり、その軌道周囲はつねに $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ である。引き続き、以下の問に答えよ。

- (4) 質点が原点を通る直線状を振幅 a で振動する場合と、半径 a で円運動をする場合を比べると、一方の力学的エネルギーは他方の簡単な整数倍になる。どちらがどちらの何倍になるか、理由をつけて答えよ。
- (5) 角運動量 L を与えたとき、質点の力学的エネルギー E は、小問題 (3) に結果を利用すると r に関する実効ポテンシャル (有効ポテンシャル) $U_{eff}(r)$ を用いて、 $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$ と書ける。 U_{eff} を r, m, L, k で表し、そのグラフの概形を r の関数として描け。また軌道の楕円の長半径と短半径を、図に示せ。
- (6) バネの伸縮にわずかな摩擦が伴うが、質点の θ 方向の運動には、摩擦はないとする。このとき、力学的エネルギー E , 角運動量 L 、それぞれの保存法則は、どう変更を受ける (あるいは受けない) か。
- (7) 小問 (6) の場合、はじめ質点が細長い楕円の軌道を描いていたとき、十分に時間がたつと、質点はどのような軌道に落ち着くか。小問 (5) の結果から推察せよ。