数理科学 II

大槻知忠

2002 年夏学期

[受験した感想]

非常に優れた講義です。ぜひとも出てちゃんと単位を取りましょう。

以下では $x=x(t), y=y(t)$ は変数 t の関数とし、未知関数 $x(t)$ に関する微分方程式 または 2 つの未知関数 $x(t), y(t)$ に関する連立微分方程式を考える。

問 1 次の微分方程式のそれぞれについて、その一般解を求めよ。

(1) $t\dfrac{dx}{dt} = x + 2t$

(2) $\dfrac{dx}{dt} + tx^2 - (2t+1)x + t + 1 = 0$
(ただし $x(t) \equiv 1$ が特殊解であることをあることを使ってもよい。)

(3) $\dfrac{dx}{dt} - 4x = t^3 e^{3t}$

問 2 次の微分方程式の初期値問題のそれぞれについて、その解を求めよ。

(1) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 \\ x(0) = 1, \dfrac{dx}{dt}(0) = -1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y \\ x(0) = 1, y(0) = -2 \end{cases}$

問 3 微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{|x-1|}$ を考える。

(1) この微分方程式は $x=1$ においてリプシッツ条件を満たさないことを示せ。

(2) 初期値 $x(0)=1$ についてこの微分方程式の初期値問題の解を 2 つ挙げよ。(すべての解を求めなくてもよい。)

問 4 連立微分方程式 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - x^2 \end{cases}$ を考える。

(1) この微分方程式の phase portrait(流れの概要) を (x,y) 平面に図示せよ。

(2) その phase portrait の中で、爆発する解からなる解軌道はどれか示せ。また、その解軌道を与える解が確かに爆発する事を証明せよ。