電磁気学 I

櫻井博儀

平成 13 年度

[第 1 問] 相対論的な非弾性散乱を考える。実験室系で運動量 p_1、静止質量 m_1 を持った粒子 1 が、静止している粒子 2(静止質量 m_2) と衝突した。光速は c とする。

(i) 粒子 1 と 2 の実験室系でのそれぞれの相対論的エネルギー E_1、E_2 を書き下せ。

(ii) 粒子 1、2 の重心系での相対論的エネルギーをそれぞれ E_1^*、E_2^*、運動量をそれぞれ $\boldsymbol{p}_1^*$、$\boldsymbol{p}_2^*$ とする。重心系では $\boldsymbol{p}_1^* + \boldsymbol{p}_2^* = 0$ が成り立っている。また、粒子 1,2 の重心系での全相対論的エネルギー W は、$E_1^* + E_2^*$ で与えられている。慣性系によらず (全相対論的エネルギー)$^2 - c^2$(全運動量)^2 がローレンツ不変であることに着目し、W を p_1, m_1, m_2 を用いて表せ。

(iii) 非弾性散乱を起こさせ、新たに静止質量 M の粒子 3 を生成したい。衝突後は粒子 3 のみ生成されたとして、M についての条件を定め、p_1 の最小値を求めよ。

[第 2 問] 以下の問いに答えよ。

(i) ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ に対し、以下の公式を証明せよ。

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = -\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})$$

(ii) 慣性系 K で電場 $\boldsymbol{E}$、磁場 $\boldsymbol{B}$ が与えられている。慣性系 K に対し速度 $\boldsymbol{v}$ で運動している慣性系 K' での $\boldsymbol{E}'$、$\boldsymbol{B}'$ は以下のように与えられる。

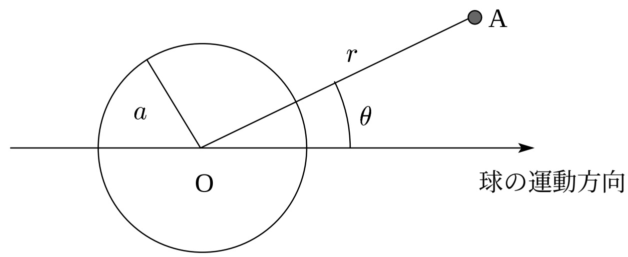
$$E'_\parallel = E_\parallel, E'_\perp = \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_\perp$$
$$B'_\parallel = B_\parallel, B'_\perp = \gamma(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}/c^2)_\perp$$

ここで添え字の $\parallel$ と $\perp$ は、$\boldsymbol{v}$ に対し、それぞれ平行、垂直の成分をあらわし、c は光速、$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ である。

(a) $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ に対してともに垂直の時、$\boldsymbol{v}$ を適当に選んで $|\boldsymbol{E}'| = 0$ とすることができる。これを満たす $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ を用いてあらわせ。但し、$|\boldsymbol{E}| < c|\boldsymbol{B}|$ とする。

(b) 前問 (a) の結果から、荷電粒子の速度を選別する事ができる装置を考案せよ。この装置の原理を説明し、また概念図を示すこと。

[第 3 問] 球面上に一様な電荷 $q(q > 0)$ が帯電している半径 a の球を考える。この球が非相対論的な速度 $v(v \ll c)$ で運動している。



(i) 図のように球の中心を原点 O とした極座標を考える。点 A(r, θ) での電場 $\boldsymbol{E}$、磁場 $\boldsymbol{B}$ の大きさを求め、方法を図示せよ。

(ii) 点 A での運動量密度 $\boldsymbol{g}(= \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})$ の大きさを求め、方向を図示せよ。

(iii) 前問 (ii) で得られた $\boldsymbol{g}$ を全空間 (ただし $a \leq r$) にわたって積分し、電磁場の電磁場の全運動量 $\boldsymbol{P}$ の大きさを求め、方向を図示せよ。電磁質量 m_e はこの結果からどう与えられるか。(ϕ に対して対称な被積分関数の場合、極座標の体積素片は $2\pi r^2 \sin\theta d\theta dr$ で与えられる事を用いてもよい。)

[第 4 問] 1 次元ポアソン方程式

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$$

の境界値問題をグリーン関数の方法で解く事を考える。単位電荷が x' にあるときのグリーン関数 $G(x, x')$ は

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x, x') = -\delta(x - x') \tag{1}$$

で与えられ、境界条件は

$$\phi(0) = \phi(a) = 0 \tag{2}$$

とする。

(i) ガウスの定理から

$$\frac{dG(x, x')}{dx}|_{x=x'+\varepsilon} - \frac{dG(x, x')}{dx}|_{x=x'-\varepsilon} = -1 \tag{3}$$

を示せ。ここで ε は正の微量数とする。

(ii) $G(x, x')$ の定義(1)、境界条件 (2)、条件 (3)、および $G(x, x')|_{x=x'-\varepsilon} = G(x, x')|_{x=x'+\varepsilon}$ からグリーン関数を求め、図示せよ。

(iii) $\rho(x)$ が、$a/4 < x < 3a/4$ の領域で ρ_0、$0 \leq x \leq a/4$ および $3a/4 \leq x \leq a$ の領域で 0 と与えられているとき、前問 (ii) で得られたグリーン関数を用いて $\phi(x)$ を求め、図示せよ。